Geometría en el espacio/ Soluciones

Ejercicio 1)a)
Hallar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto P=(1,2,5) y tiene vector director v=(2,1,3).
Esto esta explicado en el vídeo Geometría en el Espacio parte 1 por lo tanto, sin más explicación la recta quedaría:

$$r \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 1\lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{cases}$$

Ejercicio 3)a)
Hallar las ecuaciones reducida o cartesiana de la siguiente recta:

$$r \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 1 - 5\lambda \\ z = 6 + 2\lambda \end{cases}$$

(Nuevamente repasar el vídeo explicativo de Geometría en el Espacio parte 1)
Despejamos el parámetro λ de la primera ecuación obteniendo
$\lambda = \dfrac{x-2}{3}$ y sustituimos en la segunda y tercera ecuación el parámetro λ obteniendo:
$y = 1 - 5\dfrac{x-2}{3} \longleftrightarrow 3y + 5x = 13$;
$z = 6 + 2\dfrac{x-2}{3} \longleftrightarrow 3z - 2x = 14$
Obtenemos la ecuación reducida de la recta $r \begin{cases} 3y + 5x = 13 \\ 3z - 2x = 14 \end{cases}$
Como se explica en el vídeo la ecuación de r viene dada por dos ecuaciones, cada una de las cuales es la ecuación de un plano que contiene a la recta r. Hasta acá lo propuesto por el ejercicio, ahora una afirmación y algunas preguntas
La recta r también se puede expresar por la siguiente ecuación reducida
$r \begin{cases} 2x - 3z = -14 \\ 2y + 5z = 32 \end{cases}$

1. ¿Explique como puedo afirmar que ambas ecuaciones reducidas son de la misma recta r? Justifique su respuesta.
2. ¿Cuántas expresiones reducida de la recta se pueden obtener? ¿Por qué?

Ejercicio 4)a)
Hallar las ecuación paramétrica de las siguiente recta:
$r \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$
Procedemos a escalerizar eliminando una de las incógnitas de la segunda ecuación por ejemplo x nos queda:

$$r \begin{cases} x - y - z = 0 \\ y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

¿Por qué ambas expresiones reducidas son de la misma recta r?

Ahora si hacemos $z = \lambda$ y sustituimos en la segunda ecuación obtenemos y en función de λ, $y = -2 - 3\lambda$. Sustituyendo en $x - y - z = 0$ (primera ecuación) z en función de λ e y en función de λ obtenemos x en función del parámetro λ, $x = y + z = -2 - 3\lambda + \lambda = -2 - 2\lambda$
Quedando la ecuación perimétrica de la recta r

$$r\begin{cases} x = -2 - 2\lambda \\ y = -2 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

¿Cuántas expresiones paramétricas son posibles para la recta r?

Ejercicio 7)b)

Calcular a y b para que los puntos A(1,2,-1), B(3,0,-2) y C(4,a,b) estén alineados.

Definición: Sean u y v dos vectores $\in \mathbb{R}^3$. Diremos que son colineales cuando uno es múltiplo del otro. es decir, si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha * u$ o si existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $u = \beta * v$

Las coordenadas del vector AB se obtienen restando las coordenadas de B y las de A,
AB= (B-A) = (3,0,-2)-(1,2,-1)= (2,-2,-1)

y las coordenadas del vector BC se obtienen restando las coordenadas de C y las de B quedando

$BC = (C - B) =$ (4,a,b) $- (3, 0, -2) =$ (1,a-0,b+2).
Entonces si los puntos A, B y C están alineados los vectores AB y BC deben ser colineales (los puntos A,B, C están sobre la misma recta).

$AB = \alpha BC$ en coordenadas $(2, -2, -1) = \alpha *$ (1,a-0,b+2)
Por lo tanto el sistema resultante de igualar las coordenadas de ambos vectores debe de tener solución si los vectores son colineales:

$$\begin{cases} 2 = \alpha(1) \\ -2 = \alpha(a - 0) \\ -1 = \alpha(b + 2) \end{cases}$$

De la primera ecuación hallamos $\alpha = 2$ sustituimos el valor de $\alpha = 2$ en la segunda y tercera ecuación y hallamos a y b $a = -1$ y $b = \dfrac{-5}{2}$ quedando las coordenadas de el punto C(4,-1,$\dfrac{-5}{2}$).

Otra posible solución seria hallar la recta determinada por A y B y, ver si se puede hallar a y b para que el punto C este en la recta. Hallamos la ecuación de la recta r por los puntos A y B $P = A + \lambda * AB$ que en coordenadas nos queda $r\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = -1 - 1\lambda \end{cases}$

Queremos saber si el punto C(4,a,b) pertenece a r para lo cual vemos si las coordenadas de C verifican la ecuación de la recta, es decir si encontramos a y b para que se verifique que C pertenece a r $\begin{cases} 4 = 1 + 2\lambda \\ a = 2 - 2\lambda \\ b = -1 - 1\lambda \end{cases}$

Resolver el sistema anterior e interpretar la solución hallada. Comprobar si se obtiene la misma solución

Ejercicio 12)a)

Hallar el valor de a para que los puntos sean coplanares A(1,0,1), B(2,1,3), C(0,1,2) y D(a,2a,-1)

Previo

Tres puntos no alineados determinan un único plano al que pertenecen.
Un conjunto de puntos son coplanares si existe un plano que los contiene.
Por lo tanto en este ejercicio hay que probar que A,B y C no están alineados con lo cual determinan un plano π al que pertenecen y luego hallar las coordenadas de D (que dependen de a) para que pertenezca a π.

Pruebe que A, B y C no están alineados.
Hallamos la ecuación perimétrica de π. $P = A + \alpha(AB) + \beta CB$

AB(1,1,2), AC(-1,1,1)

$$\pi \begin{cases} x = 1 + 1\alpha - 1\beta \\ y = 0 + 1\alpha + 1\beta \\ z = 1 + 2\alpha + 1\beta \end{cases}$$

D pertenece a π si sus coordenadas verifican la ecuación del plano $\Pi \longleftrightarrow$ el Sistema

$\pi \begin{cases} \text{a} = 1 + 1\alpha - 1\beta \\ 2\text{a} = 0 + 1\alpha + 1\beta \\ -1 = 1 + 2\alpha + 1\beta \end{cases}$ tiene solución (Es Compatible). Resolverlo encontrando el valor de a.

Otra forma de resolverlo es la siguiente:

Si D esta en el plano π entonces el vector AD es combinación lineal de los vectores AB y CB. Justificar esta afirmación!!

Entonces el determinante que tiene como filas las coordenadas de los vectores AB, CB, y AD tiene que ser 0 ¿Por qué? .

Esto es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ a-1 & 2a & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Calcular el determinante, llegaras a una ecuación de primer grado que tiene como variable a y podrás hallar a.

Comprueba el valor hallado de a en este caso con el hallado en el primer procedimiento. (Solución $a = \frac{-3}{7}$)

Ejercicio 15)

Hallar las ecuaciones paramétricas de los ejes coordenados y de los planos coordenados.

Como ejemplo hallamos la ecuacion parametrica de uno de los ejes coordenados por ejemplo $\overrightarrow{oy}$ y de uno de los planos coordenados ejemplo el plano xoy.

Para hallar la ecuación paramétrica de $\overrightarrow{oy}$ lo planteamos como un caso más de hallar una recta dada por un punto y vector director dado, en ester caso la recta pasa por el origen de coordenadas O(0,0,0) y el vector director seria v(0,1,0) asi que escribiendo la ecuación paramétrica tenemos $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(0, 1, 0)$ de donde $y = \lambda$ puesto que las demás componentes de la ecuación son cero.

Esto es totalmente consistente puesto que los puntos del eje $\overrightarrow{oy}$ tienen primera y tercera componente nulas.

Ahora hallemos la ecuacion del plano xoy, este plano conocemos un punto que le pertenece el origen O(0,0,0) y dos vectores directores no colineales el (1,0,0) (vector director del eje ox) y (0,1,0) vector director de oy,
así la ecuación parametrica del plano xoy queda:

$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0)$

$$\begin{cases} x = 0 + 1\alpha + 0\beta \\ y = 0 + 0\alpha + 1\beta \\ z = 0 + 0\alpha + 0\beta \end{cases} entonces \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 0 + 0\alpha + 0\beta \end{cases}$$

Por lo tanto la ecuación cartesiana del plano xoy queda $z = 0$ ¿Por qué?
con igual procedimiento completar el ejercicio.

Ejercicio 16)
Hallar el punto de intersección del plano π y de la recta r
Intersección de recta y plano:
Consideremos el problema de intersectar una recta r con un plano π en $\mathbb{R}^3$
El problema planteado nos lleva a estudiar el sistema(S) formado por la ecuación de la recta y la ecuación del plano, El sistema tendrá su particularidad dependiendo de como vienen dadas las ecuaciones del plano y la recta.
En este ejercicio se presentan los siguientes casos
a- El plano viene dado por la ecuación cartesiana y la recta por su ecuación parametrica
b- Recta y plano por sus ecuaciones parametricas.
c- Plano viene dado por su ecuación cartesiana y recta por su ecuación cartesiana.
Más halla de la particularidad del sistema (S) tenemos que las únicas posibilidades son:
1-Si (S) es compatible y determinado hay una única solución que corresponde a las coordenadas del punto de intersección de la recta r con el plano π.
2-Si (S) es compatible e indeterminado entonces $r \cap \pi = r$ entonces la recta esta contenida en el plano
3-Si (S) es incompatible entonces $r \cap \pi = \Phi$. La recta es paralela al plano.
Vamos a resolver como ejemplo el caso C.
$\pi) 2x + y + z = 2$ y $r : \begin{cases} x + y - 3z = -6 \\ x + 2y - 4z = -8 \end{cases}$
El Sistema (S) a resolver queda: $(S) \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + y - 3z = -6 \\ x + 2y - 4z = -8 \end{cases}$ El sistema escalerizado queda: $(S) \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -y + 7z = 14 \\ -12z = -24 \end{cases}$

$Sol(S)$=$\{(0, 0, 2)\}$ El sistema es compatible y determinado $r \cap \pi = (0, 0, 2)$

Ejercicio 17)
Hallar los puntos de intersección de la recta r que pasa por los puntos A=(2,6,-3) y B=(3,3,-2) con los planos coordenados.
Hallamos la recta r por A y por B
El vector director de la recta AB es AB cuyas coordenadas se hallan como $B - A = (1, -3, 1)$ quedando la ecuación de la recta como sigue
$(x, y, z) = (2, 6, -3) + \lambda(1, -3, 1)$
Para hallar la intersección tengamos en cuenta:
Plano xoy de ecuación cartesiana es z=0 (la obtuvimos en un ejercicio anteriormente resuelto) y tomamos la ec. paramétrica de la recta (también podríamos hallar la cartesiana de la recta y utilizar la misma para resolver el sistema) El sistema a resolver queda:

$$\begin{cases} x = 2 + 1\lambda \\ y = 6 - 3\lambda \\ z = -3 + 1\lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

Se presentan en general 3 posibilidades para la solución del sistema:

1- Si el Sistema es Compatible y Determinado entonces la única solución son las coordenadas de $I = r \cap (xoy)$

2- Si el Sistema es Compatible e indeterminado en ese caso el plano y la recta tienen infinitos puntos en común, esto corresponde al caso en que la recta esta contenida en el plano.

3- Si el Sistema es incompatible(no tiene solución) corresponde al caso en que la recta es paralela al plano.

Queda propuesto que resuelvan el sistema.

Al resolver el sistema se obtiene como solución $I = r \cap (xoy)$ =$(5, 3, 0)$ por lo tanto la recta r intersecta al plano xoy en un solo punto I.

Se proponen los siguientes ejercicios:
-Hallar la ecuación cartesiana de una recta contenida en xoy.
-Hallar la ecuación cartesiana de una recta contenida en xoz y zoy.
-Hallar la ecuación de una recta paralela al plano xoy.

Ejercicio 18)

Hallar el punto de intersección de los planos $\pi_1)\ x+z=0$, $\pi_2)\ 2x-y-2z=5$ y $\pi_3)\ 3x+3y+2z=7$

Sin utiliza un lenguaje riguroso, cuando hablamos de intersección, en este caso de planos, nos referimos a que estamos buscando puntos en común de varios conjuntos , en este caso conjuntos de puntos de planos. Si bien en este caso la letra nos habla de punto de intersección, vamos a plantear el problema en general.

Si S_1 es el conjunto de ternas de puntos (x, y, z) que pertenecen al plano π_1, dichas ternas verifican la ecuación del plano, en lenguaje de conjuntos:
$S_1 = \{(x, y, z) \in (R^3)/a_1x + b_1y + c_1z = d\}$ Análogamente S_2 yS_3 son el conjunto de puntos de π_2 y π_3 respectivamente
$S_2 = \{(x, y, z) \in (R^3)/a_2x + b_2y + c_2z = d\}$ y $S_3 = \{(x, y, z) \in (R^3)/a_3x + b_3y + c_3z = d\}$

Hallar la intersección de π_1, π_2 y π_3 es hallar la intersección de S_1, S_2 y S_3 y por lo tanto buscamos los puntos que verifican simultáneamente las ecuaciones de los tres planos y para encontrar las soluciones comunes a tres ecuaciones resolvemos el sistema formada por las mismas.

$$P(x,y,z)\in\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3 \longleftrightarrow P \in \mathrm{S}_1\cap\mathrm{S}_2\cap \mathrm{S}_3 \longleftrightarrow \text{P(x.y.z) es solución del Sistema } (S) \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d \\ a_2x+b_2y+c_2z=d \\ a_3x+b_3y+c_3z=d \end{cases}$$

Caso1- Sistema Compatible y Determinado la solución única corresponde al punto de intersección de los tres planos.
Caso2- Sistema Compatible Indeterminado puede ser con un grado de libertad o con dos grados de libertad. interpretar las posiciones relativas de los tres planos. Discutir y Justificar.
Caso3- Sistema incompatible el Sistema no tiene solución Interpretar las posiciones relativas de los tres planos. Discutir y Justificar.

Busquemos $P(x,y,z)\in\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3$ para el caso particular de este ejercicio, para lo cual resolvemos el sistema $(S) \begin{cases} x+z=0 \\ 2x-y-2z=5 \\ 3x+3y+2z=7 \end{cases}$ cuya solucion es $P(\frac{22}{13}, \frac{23}{13}, \frac{-22}{13})$

Verificar resolviendo el sistema la solución.

Ejercicio 19)

Hallar el punto de intersección de las siguientes rectas

Este ejercicio plantea la intersección de rectas r y s. Analicemos en general el problema, tengamos en cuenta que las rectas pueden venir dadas tanto por sus ecuaciones paramétricas como por sus ecuaciones reducidas. Se presentan los siguientes casos:
1- $r \cap s = \{P\}$: las rectas son secantes, el sistema formado por ambas resultara Compatible y Determinado y la solución son las coordenadas de P.
2-$r \cap s = r = s$: las rectas coinciden, el Sistema formado por las ecuaciones de ambas resultara Compatible e Indeterminado con un grado de libertad.
3- $r \cap s = \Phi$: las rectas pueden ser paralelas (no coincidentes) o pueden cruzarse. Para lo cual consideramos los vectores $\mathbf{v}_s$ y $\mathbf{v}_r$
a- $\mathbf{v}_s$ y $\mathbf{v}_r$ son colineales entonces las rectas r y s son paralelas.
b- $\mathbf{v}_s$ y $\mathbf{v}_r$ *NO* son colineales entonces las rectas r y s se cruzan. En ambos casos el sistema resultara Incompatible.

a)

$r : \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z + 2 \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x + 3y + z + 1 = 0 \\ x - 4y - z - 3 = 0 \end{cases}$

Este es un caso en que ,las dos rectas vienen dadas por sus ecuaciones reducidas y el problema se reduce a resolver el siguiente sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas.

$S : \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 2 \\ x + 3y + z + 1 = 0 \\ x - 4y - z - 3 = 0 \end{cases}$ De donde la matriz ampliada del sistema queda: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & -1 \\ 1 & -4 & -1 & \vdots & 3 \\ 1 & -1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$

Escalerizando queda: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & -4 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & -5 & \vdots & 10 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$ cuya solución es P(1,0,-2), el Sistema es Compatible y Determinado y las rectas s y r se cortan en P.