Autómata Finito Determinista de 2 cintas

Teoría de Lenguajes

2021

Descripción informal del AFD de dos cintas

Un autómata finito determinista de dos cintas es un dispositvo similar a un AFD, cuya finalidad es aceptar (reconocer) ***pares*** de tiras (strings). Puede pensarse como consistente en dos cintas C_1 y C_2, las cuales tienen asociadas los conjuntos de estados Q_1 y Q_2 respectivamente. Cada cinta va a contener una tira; para fijar ideas llamaremos x a la tira de la cinta C_1 e y a la tira de C_2. El autómata tiene un único estado inicial, que pertenece al conjunto de estados de alguna de las dos cintas. También tiene un conjunto de estados finales $F \subseteq Q_1 \cup Q_2$. Lo que caracteriza a este autómata es su función de transición δ: si el autómata está en un estado del conjunto Q_1 asociado a la cinta C_1, lee (consume) un símbolo de la tira x y pasa a otro estado que no necesariamente es de Q_1. Si el nuevo estado resultado de la aplicación de la función de transición pertenece a Q_2, tenemos una transición o cambio de cinta y el siguiente símbolo a ser leído lo va a ser de la tira y de C_2. La ejecución del autómata prosigue de esta forma aplicando sucesivamente la función de transición hasta que se verifica uno de los siguientes dos casos:

- Se llega a un estado final perteneciente a F, y al mismo tiempo se tiene que ya se procesaron (consumieron) en su totalidad **ambas** tiras de entrada x e y. Se dice en este caso que el autómata de dos cintas acepta el par (x, y)
- Se llega a un estado en el que, o bien:
  1. la tira de la cinta correspondiente a ese estado se consumió en su totalidad, y el estado no es un estado final o siendo final la tira de la otra cinta no se terminó de procesar.
  2. la función de transición para el siguiente símbolo a consumir de la tira de la cinta a la que pertenece dicho estado no está definida.

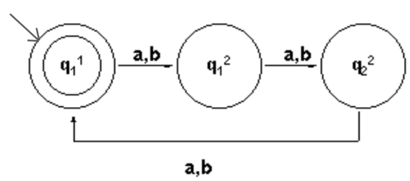
  Se dice en este caso que el autómata de dos cintas rechaza el par (x, y).

Vamos a ilustrar el concepto de AFD de dos cintas con un ejemplo sencillo:
Queremos construir un autómata que acepte pares de tiras tales que el largo de la tira de la segunda cinta sea el doble del largo de la tira de la primer cinta.
Es decir que reconozca los pares $(w_1, w_2) \in \{a, b\}^* \times \{a, b\}^* /\ 2|w_1| = |w2|$
La idea intuitiva para la operativa de reconocimiento que hace el autómata es

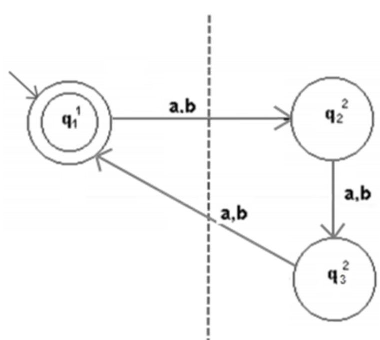
la siguiente: por cada símbolo leído de la tira w_1, leer 2 símbolos de la tira w_2. La notación que usaremos para denotar los estados del AFD de dos cintas es escribirlos como q_i^j , en dónde el superíndice j denota la cinta a la que pertenece el estado y el subíndice i es el identificador del estado. Empezamos por un estado inicial q_1^1 de la cinta 1, y repetimos el siguiente ciclo:

- Leer un simbolo de tira w_1
- Moverse a un estado q_1^2 de la cinta 2
- Leer un simbolo de la tira w_2 y moverse a un segundo estado q_2^2 de la cinta 2
- Leer un simbolo de la tira w_2 y moverse al estado inicial q_1^1 de la cinta 1

Si en un momento en que se llegue al estado q_1^1 ya se consumieron completamente a la vez las tiras w_1 y w_2, la construcción del autómata nos asegura que por cada símbolo de w_1 hay exactamente dos símbolos de w_2, lo que implica que el largo de w_2 es el doble del largo de w_1. Es así que en este caso el autómata acepta el par (w_1, w_2) y el estado inicial q_1^1 es a su vez el único estado final.
Si el autómata finaliza su ejecución en cualquiera de los estados q_1^2 o q_2^2, el par (w_1, w_2) es rechazado.
El diagrama de estados del AFD de dos cintas se ilustra en la figura siguiente:



Un diagrama de estados alternativo para el ejemplo desarrollado se muestra a continuación.



Consiste en dividir mediante una recta vertical el plano en dos semiplanos, cada uno de ellos asociado a una única cinta. En el semiplano izquierdo se escriben los estados de Q_1 asociados a la cinta C_1 y en de la derecha los de Q_2 asociados a la cinta C_2. Las transiciones dentro de un mismo semiplano son entre estados de una misma cinta, y las que cruzan la frontera corresponden a un cambio de cinta del autómata. Una ventaja de esta representación es que se visualizan en forma más clara los cambios de cinta del autómata.

Descripción formal del AFD de dos cintas

Un autómata finito determinista de dos cintas es una tupla $M = (Q_1, Q_2, \Sigma, \delta, F, q_0)$ dónde:

- Σ es el alfabeto del autómata
- $q_0 \in (Q_1 \cup Q_2)$ estado inicial del autómata
- $F \subseteq (Q_1 \cup Q_2)$ conjunto de estados finales del autómata
- $\delta : (Q_1 \cup Q_2) \times \Sigma \rightarrow (Q_1 \cup Q_2)$ función de transición
- $\delta' : (Q_1 \cup Q_2) \times \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow (Q_1 \cup Q_2)$ función de transición extendida:
  - $\delta'(q_i, ax, y) = \delta'(\delta(q_i, a), x, y)$ si $q_i \in Q_1$
  - $\delta'(q_i, x, ay) = \delta'(\delta(q_i, a), x, y)$ si $q_i \in Q_2$
  - $\delta'(q_i, \epsilon, \epsilon) = q_i$

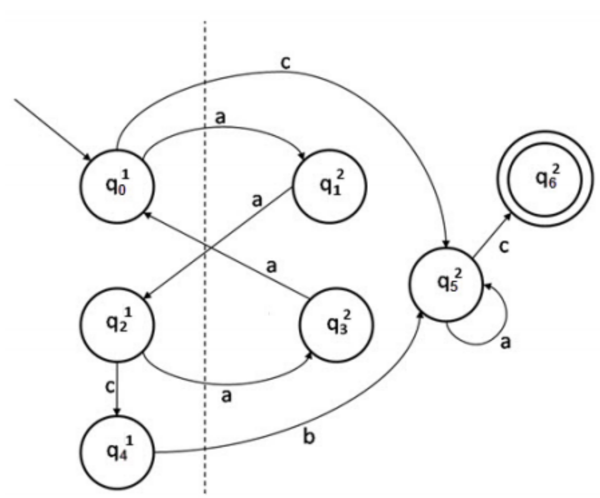
Un par de tiras $(v, w) \in L(M) \Leftrightarrow \delta'(q_0, v, w) \in F$.

Consideraremos en lo que sigue un par de ejemplos no triviales de AFD de 2 cintas.

Ejemplo 1

El problema consiste en construir una AFD de dos cintas que acepte el lenguaje $L_1 = \{(a^n c\, b^{(n \bmod 2)}, a^m c) \;/ m \geq n \geq 0\}$.
Analizando la definición de L_1 observamos que si n es par, la primera tira no debe contener $b's$, y si n es impar dicha tira debe tener una única b. Esto sugiere la conveniencia de mantener dos estados de Q_1 asociados a la cinta 1 que correspondan respectivamente a cantidad par e impar de $a's$ en la tira 1.
Vemos también que la tira 2 debe tener al menos tantas $a's$ como la tira 1 ($m \geq n$) por lo que podemos replicar esos dos estados de Q_1 en Q_2, de forma de que cada vez que se consuma una a de la tira 1 se cambie de cinta y se consuma una a de la tira de la cinta 2, volviendo al estado de la cinta 1 que corresponda según la cantidad de $a's$ consumidas hasta el momento sea par o impar.
¿Qué hacer cuando se lea una c en la cinta 1?. Va a depender si se está en el estado de Q_1 de número par de $a's$ o en el de número impar. Si estamos en el estado par, esa c debería ser el último símbolo de una tira 1 válida, por lo que el autómata se mueve a un nuevo estado de Q_2 en la cinta 2 para terminar de reconocer la tira 2. Si en cambio se está en el estado impar, se hace una

transición a otro estado nuevo de Q_1 a esperar una b, que sería el último símbolo de una tira 1 válida en este caso, y cuando llegue esa b se mueve al mismo nuevo estado de Q_2 que en el caso del estado par al llegar una c. En este estado el autómata consume las eventuales $a's$ que resten en la tira 2, y al llegar una c pasa a un nuevo estado de Q_2 que es el único estado final del autómata.
El diagrama de estados del AFD de dos cintas descrito que reconoce a L_1 queda:



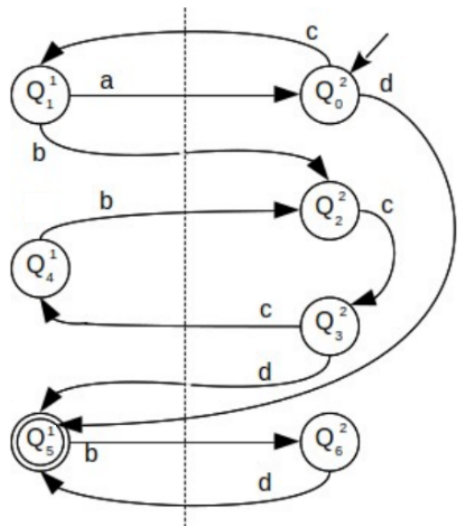
Ejemplo 2

En los dos ejemplos vistos hasta el momento, el AFD de 2 cintas comienza su ejecución leyendo sobre la tira 1 (en un estado de Q_1 en el semiplano izquierdo del diagrama). En este ejemplo se mostrará que esto no necesariamente debe ser así en todos los casos.

Nos planteamos construir una AFD de dos cintas que reconozca el lenguaje
$L_2 = \{(a^k b^{p+q}, c^{2q+k} d^{p+1}) \ /k, p, q \geq 0\}$.

¿Puede este lenguaje ser reconocido por un AFD de 2 cintas que arranque su ejecución leyendo un símbolo de la tira 1, es decir en un estado inicial de Q_1? La repuesta es **no**, y para justificarlo consideremos el par de tiras de entrada particular correspondiente a $k = p = q = 0$, es decir el par (ϵ, d). Este par pertenece al lenguaje L_2, pero no es aceptado por un autómata con estado inicial en Q_1 pues la tira vacía no genera transiciones de estado y nunca va a ser consumido el símbolo d de la segunda tira.

Mostramos a continuación el diagrama de estados de un AFD de 2 cintas que reconoce a L_2 y comienza su ejecución por la cinta 2 (estado inicial en el semi-plano derecho), describiendo más abajo la lógica que lleva a su elaboración.



Observando la expresión de las tiras del lenguaje encontramos que la tira 2 debe tener al menos tantas $c's$ como $a's$ presentes en la tira 1. Planteamos inicialmente entonces que el autómata consuma alternadamente $c's$ y $a's$, en un ciclo entre el estado inicial q_0 de Q_2 y un estado q_1 de Q_1, hasta que se acaben las $a's$ o ambas al mismo tiempo (este último caso correspondería a tener $q = 0$).
Si en la tira 1 se lee una b, se evoluciona a un estado q_2 de Q_2 en donde para un par de tiras válido se espera leer al menos otra c, ya que por cada b de la tira 1 deben existir 2 $c's$ de la tira 2, y la primera de éstas $c's$ fue consumida en la transición del estado q_0 a q_1. En esta etapa del procesamiento la estrategia consiste en consumir dos $c's$ de la tira 2 por cada b de la tira 1. Esto se logra siguiendo un ciclo entre los estados q_2 y q_3 de Q_2 y un estado q_4 de Q_1, que comienza y termina en el estado q_3 y se repite $q - 1$ veces. El ciclo termina cuando se lee una d en la cinta 2, con una transición a un estado q_5 de Q_1 que va a ser el único estado final del autómata. Si $p = 0$, en una pareja de tiras perteneciente a L_2 en este momento se deberían haber acabado tanto las $b's$ de la tira 1 como las $d's$ de la tira 2, por lo que la ejecución termina aquí. Si $p > 0$, se consumen en forma alternada las p $b's$ de la tira 1 y las p $d's$ de la tira 2 mediante un ciclo entre q_5 y un estado q_6 de la cinta 2.
Para contemplar el caso $q = k = 0$ (no hay $c's$ en la tira 2), debe incluirse en el diagrama una transición directa desde q_0 al estado final q_5.
Observación: el estado final q_5 podría haber estado asociado a la cinta 2, y el q_6 a la cinta 1, sin alterar los pares de tiras reconocidos por el autómata.