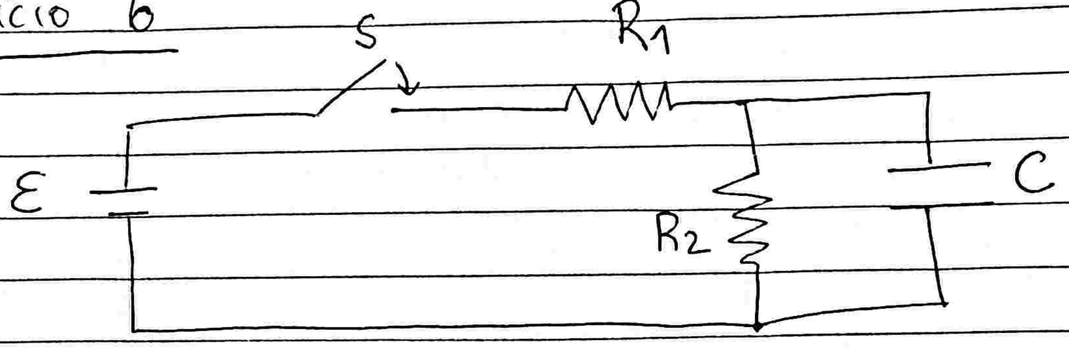
⑦

Ejercicio 6



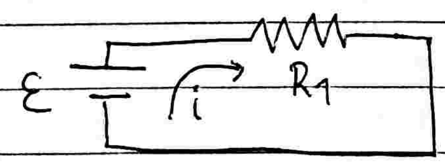
a)

- El capacitor está descargado en $t=0^+$: $Q(0)=0$

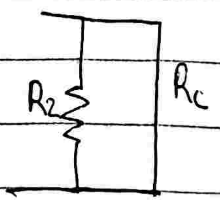
$$\Rightarrow \Delta V_C = \frac{Q}{C} = 0 \quad \text{en } t=0^+$$

$\Rightarrow$ Es decir, cuando el condensador está descargado en $t=0$ se comporta como un cable perfecto (sin resistencia)

El circuito equivalente en $t=0^+$ es:



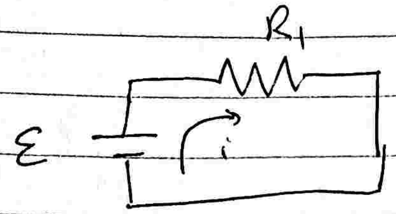
Una forma de ver porque el resistor R_2 no contribuye es notar que tenemos una conexión en paralelo entre R_2 y un cable perfecto:



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_c)\to 0} \Rightarrow \boxed{R_{eq} \to 0}$$

$\Rightarrow$ La corriente elige el camino con menos resistencia

Aplicando Kirchhoff en circuito equivalente:

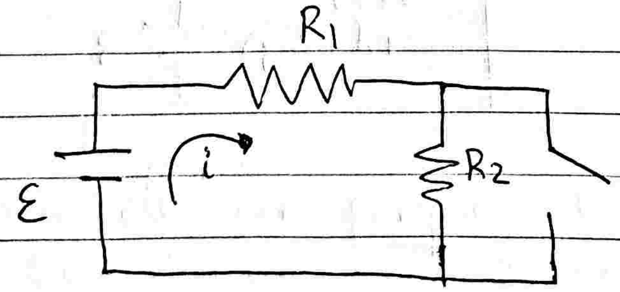


$$\mathcal{E} - R_1 i = 0$$

$$\boxed{i(t=0^+) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = 41{,}6\,\mu A}$$

b) A medida que el condensador se carga la corriente por el capacitor tenderá a 0 $\Rightarrow$ el capacitor a tiempos largos se comporta como un interruptor abierto

El circuito equivalente es:



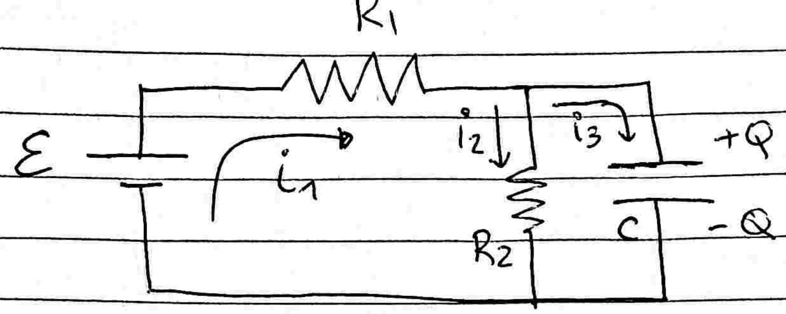
Usando Kirchhoff: $\mathcal{E} - R_1 i - R_2 i = 0$

$$\boxed{i(t=\infty) = \frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2} = 27{,}8\,\mu A}$$

Papiros

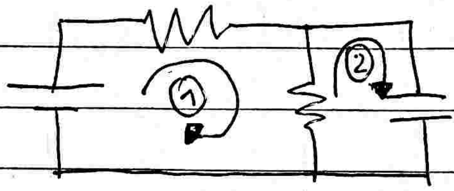
3

Resolvamos el circuito para cualquier tiempo t.



Defino corrientes en cada rama

Para Kirchhoff voy a usar dos lazos:



Lazo 1:

$$\mathcal{E} - R_1 i_1 - R_2 i_2 = 0 \qquad (1)$$

Lazo 2:

$$-\frac{Q}{C} + R_2 i_2 = 0 \qquad (2)$$

Suma de corrientes en nodo: $i_1 = i_2 + i_3$ (3)
(Kirchhoff 1ª)

En el condensador: $i_3 = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$ (4)

(Si i_3 es positiva, cargas positivas llegan a la placa de arriba y el condensador se carga)

4

De 2:

$$i_2 = \frac{Q}{R_2 C}$$

Sustituyendo 3 en 1

$$\mathcal{E} - R_1 (i_2 + i_3) - R_2 i_2 = 0$$

En función de Q y $\dot{Q}$

$$\mathcal{E} - R_1 \left(\frac{Q}{R_2 C} + \dot{Q} \right) - \frac{R_2 Q}{R_2 C} = 0$$

Reordenando:

$$\boxed{\dot{Q} + Q \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\mathcal{E}}{R_1}}$$

⇒ Esta es una ec. diferencial lineal de 1er orden

La solución es la suma de una solución homogenea y una particular:

$$Q = Q_H + Q_P$$

Q_H satisface: $\dot{Q}_H + Q_H \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0$

Q_P satisface: $\dot{Q}_P + Q_P \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\mathcal{E}}{R_1}$

Para la solución particular $Q_p(t)$ buscamos una forma parecida al término independiente ε/R

Probamos con $Q_p(t) = K$ (constante)

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{\dot{Q}_p}}_{0} + K\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = \frac{\varepsilon}{R_1}$$

$$K \cdot \alpha = \frac{\varepsilon}{R_1} \Rightarrow \boxed{Q_p = \frac{\varepsilon}{R_1 \alpha}}$$

$$\text{donde} \quad \alpha = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

Para la solución Q_H:

$$\dot{Q}_H + \alpha Q_H = 0$$

buscamos solucion $Q_H(t) = A e^{-\lambda t}$ con A constante

$$\dot{Q}_H = -\lambda A e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow -\lambda A e^{-\lambda t} + \alpha A e^{-\lambda t} = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \alpha}$$

$$Q_H(t) = A e^{-\alpha t}$$

Ahora:

$$Q(t) = \frac{\varepsilon}{R_1 \alpha} + A e^{-\alpha t}$$

En $t=0$: $Q(0)=0$ condición inicial

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{R_1\alpha} + A = 0 \Rightarrow A = -\frac{\varepsilon}{R_1 \alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q(t) = \frac{\varepsilon}{R_1\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)}$$

con $\alpha = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$

Entonces:

$$i_3(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon}{R_1} e^{-\alpha t}$$

$$i_2(t) = \frac{Q}{R_2 C} = \frac{\varepsilon}{R_1 R_2 \alpha C}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}$$

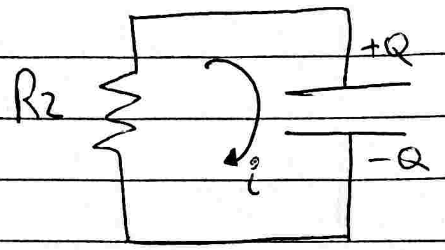
$$\Rightarrow i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{i_1(t) = \frac{\varepsilon}{R_1} e^{-\alpha t} + \frac{\varepsilon}{R_1+R_2}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)}$$

En $t=0$: $i_1(0) = \varepsilon / R_1$

$t=\infty$: $i_1(\infty) = \varepsilon / (R_1 + R_2)$

c) Si el interruptor se abre el condensador se descarga por R_2, que es el único circuito cerrado.



El condensador inicialmente tiene carga $Q(t=\infty)$ usando la carga encontrada antes:

$$\boxed{Q(t=\infty) = \frac{\varepsilon C R_2}{R_1+R_2}}$$

Aplicando Kirchhoff 2ª:

$$-\frac{Q}{C} - R_2 i = 0 \quad \text{con } i = \dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$$

$$\Rightarrow \dot{Q} + \frac{Q}{R_2 C} = 0 \Rightarrow Q(t) = Be^{-\lambda t}$$ probamos esta solución

ec diferencial lineal, 1º orden, homogenea

$$\Rightarrow -B\lambda e^{-\lambda t} + \frac{Be^{-\lambda t}}{R_2 C} = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{R_2 C}}$$

$\tau = R_2 C$ es la cte de tiempo de descarga del capacitor

$$\Rightarrow Q(t) = B\, e^{-\frac{t}{R_2 C}}$$

8

En $t=0$: $Q = \dfrac{\mathcal{E} C R_2}{R_1 + R_2} = B$

$$\Rightarrow \boxed{Q(t) = \frac{\mathcal{E} C R_2}{R_1 + R_2} e^{-t/R_2 C}}$$