Física 3, primer semestre 2020.

Ejercicio 6, Práctico 4:

La capacitancia está definida según la expresión:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|}$$

Al tratarse de un conductor, todos los puntos de una misma placa deben estar al mismo potencial, por lo tanto, la diferencia de potencial entre placas, ΔV $(= |V_{placa\,sup} - V_{placa\,inf}|)$, es la misma para ambas zonas, 1 y 2.

Además, la carga total de una placa se distribuirá en las dos superficies delimitadas por cada material, con distribuciones de carga constantes, σ_1 y σ_2:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2$$

Hasta ahora tenemos,

$$C = \frac{\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2}{|\Delta V|}$$

Recordemos que en el práctico 2 aplicamos la ley de Gauss a un capacitor de placas paralelas y calculamos el campo eléctrico en su interior. Este es perpendicular a las placas y su módulo tiene la forma $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$, donde ε es la permitividad del material entre las placas ($\varepsilon = k\varepsilon_0$).

Dicho esto, el módulo del campo eléctrico en la zona 1 es $E_1 = \frac{\sigma_1}{k_1\varepsilon_0}$ y en la zona 2 es $E_2 = \frac{\sigma_2}{k_2\varepsilon_0}$.

Entonces,

$$C = \frac{E_1 k_1 \varepsilon_0 A_1 + E_2 k_2 \varepsilon_0 A_2}{|\Delta V|}$$

Por último,en un capacitor de placas paralelas, $|\Delta V| = \int_0^d \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{\ell} = \int_0^d E d\ell$, ya que el campo es perpendicular a las placas (paralelo a $d\overrightarrow{\ell}$) y, además, $|\Delta V| = E\int_0^d d\ell = Ed$, ya que su modulo es uniforme en el espacio entre ellas.

Esto último implica que

$$C = \frac{\frac{|\Delta V|}{d} k_1 \varepsilon_0 A_1 + \frac{|\Delta V|}{d} k_2 \varepsilon_0 A_2}{|\Delta V|} = \frac{k_1 \varepsilon_0 A_1}{d} + \frac{k_2 \varepsilon_0 A_2}{d}.$$

Nótese que esto es equivalente a modelar este capacitor como dos capacitores en paralelo, ya que $C = C_1 + C_2$.

Además, si cada uno de los materiales ocupa exactamente la mitad del espacio entre placas (como pide el ejercicio), $A_1 = A_2 = A/2$, y entonces,

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \frac{(k_1 + k_2)}{2}.$$