Solución ejercicio 1

a) No circulan corrientes dentro ni fuera del cilindro, lo que implica

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = -\nabla\psi$$

para todo $r \neq a$. Por otro lado, dentro del cilindro, $\nabla \cdot \vec{B} = \mu \nabla \cdot \vec{H} = -\mu \nabla \cdot \nabla \psi = 0$, es decir,

$$\nabla^2 \psi = 0$$

Un análisis análogo prueba que vale Laplace fuera del cilindro.

b) En primer lugar, al no haber corrientes en el interior ni en el exterior del cilindro, el campo magnético debe ser acotado en ambas regiones y por lo tanto el potencial no puede diverger. En particular,

$$\psi \mid_{r=0} < +\infty \tag{1}$$

$$\lim_{r \to +\infty} \left| \vec{B} \right| < +\infty \tag{2}$$

Además tenemos las condiciones que deben cumplir los campos $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en la interfaz entre ambos medios:

$$\vec{B} \cdot \hat{e}_r \mid_{r=a^+} = \vec{B} \cdot \hat{e}_r \mid_{r=a^-}$$

$$\Rightarrow \quad \mu \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \mid_{r=a} = \mu_0 \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \mid_{r=a} \tag{3}$$

$$\hat{e}_r \times \left(\vec{H} \mid_{r=a^+} - \vec{H} \mid_{r=a^-} \right) = \vec{K}$$

$$\hat{e}_r \times \nabla \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \hat{z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \right) \mid_{r=a} = a K_0 \cos\varphi \tag{4}$$

c) Como muestran las condiciones de borde, el problema es invariante por translaciones según $\hat{z}$, por lo que el potencial será independiente de dicha coordenada; $\psi = \psi(r, \varphi)$. Además ψ debe satisfacer la ecuación de Laplace, lo que implica,

$$\psi_1 = A_0 + B_0 \log r + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(A_m r^m + B_m r^{-m} \right) \cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(A'_m r^m + B'_m r^{-m} \right) \sin(m\varphi)$$

$$\psi_2 = C_0 + D_0 \log r + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(C_m r^m + D_m r^{-m} \right) \cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(C'_m r^m + D'_m r^{-m} \right) \sin(m\varphi)$$

d) La condición (1) implica $B_0 = B_m = B'_m = 0$ para todo $m > 0$. De forma similar, (2) implica $C_m = C'_m = 0$ para todo $m > 0$.

Tomando en cuenta lo anterior, la condición (3) se escribe

$$\mu \sum_{m=1}^{+\infty} \left(A_m m a^{m-1} \cos(m\varphi) + A'_m m a^{m-1} \sin(m\varphi) \right)$$

$$= -\mu_0 \frac{D_0}{a} - \mu_0 \sum_{m=1}^{+\infty} \left(D_m m a^{-(m+1)} \cos(m\varphi) + D'_m m a^{-(m+1)} \sin(m\varphi) \right) \tag{5}$$

Las funciones 1, $\cos(m\varphi)$, $\sin(m\varphi)$ son linealmente independientes y por tanto sus coeficientes deben ser iguales;

$$\mu A_m a^{2m} + \mu_0 D_m = \mu A'_m a^{2m} + \mu_0 D'_m = 0$$

y $D_0 = 0$.

Finalmente, la condición (4),

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left(-A_m a^m m \sin(m\varphi) + A'_m a^m m \cos(m\varphi)\right) - \sum_{m=1}^{+\infty} \left(-D_m a^{-m} m \sin(m\varphi) + D'_m a^{-m} m \cos(m\varphi)\right) = aK_0 \cos\varphi$$

implica

$$A'_1 - \frac{D'_1}{a^2} = K_0$$

$$A_m a^{2m} - D_m = A'_m a^{2m} - D'_m = 0$$

por el mismo argumento de independencia lineal. Sustituyendo estos resultados en los obtenidos con la condición (3) se obtiene,

$(\mu + \mu_0) A_m a^{2m} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_m = D_m = 0$ para todo $m = 1, 2, 3, \ldots$

$(\mu + \mu_0) A'_m a^{2m} = 0 \quad \Rightarrow \quad A'_m = D'_m = 0$ para todo $m = 2, 3, 4, \ldots$

$\mu K_0 a^2 + (\mu + \mu_0) D'_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad D'_1 = -\frac{\mu}{\mu+\mu_0} a^2 K_0,\ A'_1 = \frac{\mu_0}{\mu+\mu_0} K_0$

Es decir,

$$\psi(r, \varphi) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{\mu+\mu_0} K_0 r \sin\varphi & \text{si } r < a \\ -\frac{\mu}{\mu+\mu_0} K_0 \frac{a^2}{r} \sin\varphi & \text{si } r > a \end{cases}$$

e)

$$\vec{B} = \begin{cases} -\mu \nabla \psi_1 = -\frac{\mu\mu_0}{\mu+\mu_0} K_0 \left(\hat{e}_r \sin\varphi + \hat{e}_\varphi \cos\varphi\right) & \text{si } r < a \\ -\mu_0 \nabla \psi_2 = \frac{\mu\mu_0}{\mu+\mu_0} K_0 \frac{a^2}{r^2} \left(-\hat{e}_r \sin\varphi + \hat{e}_\varphi \cos\varphi\right) & \text{si } r > a \end{cases}$$

Ejercicio 2

a) Material con $\mu \gg \mu_0$: $\vec{H}_\mu = \frac{1}{\mu}\vec{B}_\mu$

Material con $\vec{M}$ fija: $\vec{H}_M = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_M - \vec{M}$

Entrehierro: $\vec{H}_{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_{\mu_0}$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla \vec{B} = 0 \Rightarrow \phi_\mu = \phi_{\mu_0} = \phi_M \\ \quad S\ cte\end{array}\right\} \Rightarrow B_\mu = B_{\mu_0} = B_M = B$$

Por Ampere: $\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = 0$

$$\Rightarrow 3l\frac{1}{\mu}B + 2x\frac{1}{\mu_0}B + l\frac{1}{\mu_0}B - lM_0 = 0$$

$$\Rightarrow B = \frac{l\mu\mu_0 M_0}{3l\mu_0 + 2x\mu + l\mu}$$

$$\Rightarrow U_{\mu_0} = \frac{l^2\mu^2\mu_0 M_0^2 S x}{(3l\mu_0 + 2x\mu + l\mu)^2}$$ Energía en entrehierro

$$\Rightarrow \boxed{m_{max} = \frac{\mu^2 M_0^2 \mu_0 S}{g(3\mu_0 + \mu)^2}}$$

b) Por Amere: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_1 I - N_2 I$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} & 3l \frac{1}{\mu} B + l \frac{1}{\mu_0} B - l M_0 = (N_1 - N_2) I \\ & B = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{l M_0}{N_2 - N_1}}$$

c)

$$B\left(\frac{3l}{\mu} + \frac{2x}{\mu_0} + \frac{l}{\mu_0}\right) - l M_0 = (N_1 - N_2) I$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu \mu_0 [l M_0 + (N_1 - N_2) I]}{3 l \mu_0 + 2x\mu + l\mu}$$

$$U_{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2 \, 2x S$$

$$\Rightarrow \vec{F}\Big|_{x=0} = - \frac{S \mu_0 \mu^2 [l M_0 + (N_1 - N_2) I]^2}{(3 l \mu_0 + l \mu)^2} \hat{j}$$

$$\Rightarrow \frac{S \mu_0 \mu^2 [l M_0 + (N_1 - N_2) I]^2}{(3 l \mu_0 + l \mu)^2} \geq mg$$

$$\Rightarrow \boxed{m \leq \frac{S \mu_0 \mu^2 [l M_0 + (N_1 - N_2) I]^2}{g (3 l \mu_0 + l \mu)^2}}$$

Solución Problema 3

a) La impedancia puede calcularse como un paralelo:

$$Z = \frac{1}{j\omega C} \parallel (R{+}j\omega L) = \frac{1/j\omega C(R + j\omega L)}{1/j\omega C + R + j\omega L} = \frac{R + j\omega L}{1 + j\omega C(R + j\omega L)} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

Multiplicando por el conjugado arriba y abajo, se expresa finalmente en parte real e imaginaria:

$$Z = \frac{R(1 - \omega^2 LC) + \omega^2 RLC + j(\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega R^2 C)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}$$

b) Basta igualar el denominador de la parte imaginaria a cero y despejar:

$$\begin{aligned}
0 &= \omega_0 L(1 - \omega_0^2 LC) - \omega_0 R^2 C \\
L &= C(R^2 + \omega_0^2 L^2) \\
C &= \frac{L}{R^2 + \omega_0^2 L^2}
\end{aligned}$$

c) Calculamos la impedancia conectada al secundario para el valor de frecuencia ω_0. Ignoramos la parte imaginaria pues sabemos que será nula.

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{R(1 - \omega^2 L \frac{L}{R^2+\omega_0^2 L^2}) + \omega^2 RL \frac{L}{R^2+\omega_0^2 L^2}}{(1 - \omega^2 L \frac{L}{R^2+\omega_0^2 L^2})^2 + (\omega R \frac{L}{R^2+\omega_0^2 L^2})^2} \\
Z &= \frac{R(R^2 + \omega_0^2 L^2 - \omega_0^2) + \omega_0^2 RL^2}{(R^2 + \omega_0^2 L^2 - \omega_0^2 L^2)^2 + \omega_0^2 R^2 L^2} \frac{\frac{1}{R^2+\omega_0^2 L^2}}{\frac{1}{(R^2+\omega_0^2 L^2)^2}} \\
Z &= \frac{\omega_0^2 L^2 + R^2}{R}
\end{aligned}$$

Luego planteamos las mallas para resolver el circuito:

$$\begin{aligned}
V_0 &= R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\
-Z I_2 &= j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1
\end{aligned}$$

De la segunda ecuación:

$$I_2 = -\frac{j\omega M}{Z + j\omega L_2} I_1$$

Sustituyendo en la primera:

$$V_0 = I_1 \left[R_1 + j\omega L1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z + j\omega L_2} \right]$$

Operando, finalmente se llega a:

$$I_1 = V_0 \left[\frac{Z + j\omega L_2}{R_1 Z + \omega^2(M^2 - L_1 L_2) + j\omega(L_1 Z + L_2 R_1)} \right]$$

Sabemos que $i(t) = |I_1| cos(\omega t + \varphi)$, con $\varphi = \arg(I_1)$. Por lo tanto, solo resta calcular los parámetros:

$$\begin{aligned} |I_1| &= V_0 \sqrt{\frac{Z^2 + \omega^2 L_2^2}{(R_1 Z + \omega^2(M^2 - L_1 L_2))^2 + (\omega(L_1 Z + L_2 R_1))^2}} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{\omega L_2}{Z}\right) - \arctan\left(\frac{\omega(L_2 R_1 + L_1 Z)}{R_1 Z + \omega^2(M^2 - L_1 L_2)}\right) \end{aligned}$$

Con $Z = \frac{\omega_0^2 L^2 + R^2}{R} \in \mathbb{R}$