Ejercicio 1

a) El sistema está en estado estacionario sin aporte de energía, lo que lleva a que no pueda mantener corrientes no nulas. En consecuencia

$$\vec{J} = \nabla \wedge \vec{H} = \vec{0}$$

Por lo tanto, y dado μ es constante en cada región y que ambas regiones son simplemente conexas, $\vec{B} = \mu\vec{H}$ deriva de un potencial ($\vec{B} = -\nabla\varphi$) en cada región.

b) Dado que no existen monopolos magnéticos, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. En consecuencia:

$$0 = \nabla \cdot \vec{B} = -\nabla^2\varphi$$

en cada región.

c) En cada una de las regiones vale la ecuación de Laplace. Además, si tomamos como eje z el que pasa por el centro de la esfera y que tiene por dirección la de $\vec{B}_0$, el sistema es invariante azimutal (invariante bajo rotaciones según el eje z). Como, además, el ángulo θ de las coordenadas esféricas puede variar libremente en cada una de las regiones entre 0 y π (con bordes incluidos), estamos en las hipótesis vistas en teórico que conducen a que el potencial en cada región pueda desarrollarse en polinomios de Legendre tal como señala la letra.

d) En el origen no hay cargas ni corrientes singulares, por lo que la solución del problema no puede contener términos que no sean regulares. Esto implica la condición (i). Por otro lado, cuando $r \to \infty$, el efecto de la esfera es depreciable y por lo tanto $\vec{B} \to \vec{B}_0$. Es decir $-\nabla\varphi \to \vec{B}_0$. Como la dirección z está según $\vec{B}_0$, tomando el sentido de z igual que el de $\vec{B}_0$, concluimos que $\varphi \sim -B_0 z = -B_0 r cos\theta$. Esto lleva a la condición (ii).
Por otro lado, como no hay monopolos magnéticos, $\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$ en cualquier superficie S cerrada. En particular, si tomamos un pequeño cilindro achatado con tapas de un lado y otro del borde, concluimos que $B_I^n = B_{II}^n$. Es decir, que la componente normal a la superficie del campo magnético es continua. Ahora bien, siendo la superficie una esfera de centro en el orígen, la componente normal al campo magnético se obtiene como $B^n|_{r=a} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}|_{r=a}$, lo que da lugar a la condición (iii).
Finalmente, como no hay corrientes, la circulación de $\vec{H}$ en cualquier curva cerrada es nula. Tomando como curva un pequeño rectángulo con los dos lados más largos de un lado y otro del borde, concluimos que $H_I^t = H_{II}^t$. Es decir que la componente tangencial a la superficie del campo $\vec{H}$ es continua. Ahora bien, la única componente tangencial a la superficie no nula es proporcional a $\vec{e}_\theta$, por lo que basta calcular $\vec{H} \cdot \vec{e}_\theta$ en la superfie, que es proporcional a $\frac{1}{\mu}\frac{\partial\varphi_I}{\partial\theta}|_{r=a}$ de un lado y $\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\varphi_{II}}{\partial\theta}|_{r=a}$, lo que da lugar a la identidad (iv).

e) Debido al teorema de unicidad de las soluciones de la ecuación de Laplace con condiciones de borde como las presentes en este ejercicio, basta con encontrar una solución que cumpla con todas las soluciones de borde, pues entonces será la única posible. Por ello, es conveniente (por más que no indispensable), limitarse a los términos que uno intuya que son no nulos. En este caso conviene limitarse a las expresiones siguientes:

$$\varphi_I(r,\theta) = a_0 + \frac{b_0}{r} + \Big(a_1 r + \frac{b_1}{r^2}\Big)cos\theta \quad (1)$$

$$\varphi_{II}(r,\theta) = c_0 + \frac{d_0}{r} + \Big(c_1 r + \frac{d_1}{r^2}\Big)cos\theta \quad (2)$$

De hecho, podemos tomar sin pérdida de generalidad las constantes a_0 y c_0 nulas pues corresponden a constante aditivas arbitrarias. Vale señalar que las condiciones de borde de la pregunta (d) no dan lugar a la continuidad del potencial. Por lo tanto, ambas constantes pueden ser fijadas arbitrariamente y no sólo una. Podemos entonces, aplicar las condiciones de borde. La concición (i) implica que $b_0 = 0$ y $b_1 = 0$. La condición (ii) implica que $c_1 = -B_0$. Con estas dos condiciones, más la elección de los niveles de referencia de los potenciales, la forma de las soluciones quedan:

$$\begin{aligned} \varphi_I(r,\theta) &= a_1 r cos\theta && (3)\\ \varphi_{II}(r,\theta) &= \frac{d_0}{r} + \Big(- B_0 r + \frac{d_1}{r^2}\Big) cos\theta && (4) \end{aligned}$$

A partir de estas expressiones podemos calcular las derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_I(r,\theta)}{\partial r} &= a_1 cos\theta && (5)\\ \frac{\partial\varphi_{II}(r,\theta)}{\partial r} &= -\frac{d_0}{r^2} + \Big(- B_0 - 2\frac{d_1}{r^3}\Big) cos\theta && (6) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_I(r,\theta)}{\partial \theta} &= -a_1 r sen\theta && (7)\\ \frac{\partial\varphi_{II}(r,\theta)}{\partial \theta} &= -\Big(- B_0 r + \frac{d_1}{r^2}\Big) sen\theta && (8) \end{aligned}$$

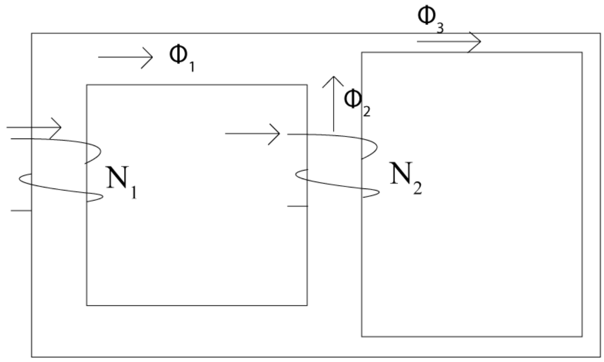
Entonces, imponiendo la condición (iii) para todo θ concluimos que $d_0 = 0$ y $a_1 = -B_0 - 2d_1/a^3$. Además, imponiendo la condición (iv) obtenemos $d_1 = a^3 c_1(\mu_0 - \mu)/(\mu + 2\mu_0)$. Vemos, por lo tanto, que la forma de la solución conjeturada satisface todas las condiciones de borde y obtenemos el potencial de la forma:

$$\begin{aligned} \varphi_I(r,\theta) &= -3\frac{\mu B_0}{\mu + 2\mu_0} r cos\theta && (9)\\ \varphi_{II}(r,\theta) &= -B_0\Big(r + \frac{a^3}{r^2}\frac{\mu_0 - \mu}{\mu + 2\mu_0}\Big) cos\theta && (10) \end{aligned}$$

f) Tomando (menos) el gradiente en coordenadas esféricas podemos calcular el campo magnético:

$$\begin{aligned} \vec{B}_I(r,\theta) &= 3\frac{\mu B_0}{\mu + 2\mu_0} cos\theta \vec{e}_r - 3\frac{\mu B_0}{\mu + 2\mu_0} sen\theta \vec{e}_\theta = 3\frac{\mu B_0}{\mu + 2\mu_0}\vec{k}\\ \vec{B}_{II}(r,\theta) &= B_0\Big(1 - 2\frac{a^3}{r^3}\frac{\mu_0 - \mu}{\mu + 2\mu_0}\Big) cos\theta \vec{e}_r - B_0\Big(1 + \frac{a^3}{r^3}\frac{\mu_0 - \mu}{\mu + 2\mu_0}\Big) sen\theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Ejercicio 2



a) Tomando los flujos magnéticos y las corrientes como se ve en la figura tenemos:

$$\begin{aligned} N_1 I_1 &= R_1\phi_1 + R_3\phi_3 && (11)\\ N_2 I_2 &= R_2\phi_2 + R_3\phi_3 && (12)\\ \phi_3 &= \phi_1 + \phi_2 && (13) \end{aligned}$$

Donde: $R_1 = \dfrac{3l}{\mu S_1}$, $R_2 = \dfrac{l}{\mu S_1}$ y $R_3 = \dfrac{3l}{\mu S_2}$

Sustituyendo la ecuación 3 en la 1 y la 2:

$$\begin{aligned} N_1 I_1 &= (R_1 + R_3)\phi_1 + R_3\phi_2 && (14)\\ N_2 I_2 &= (R_2 + R_3)\phi_2 + R_3\phi_1 && (15) \end{aligned}$$

Si llamamos $R = l/\mu S_1$ entonces $R_2 = R$, $R_1 = 3R$ y $R_3 = 3R/\alpha$.

$$\begin{aligned} N_1 I_1 &= 3R\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\phi_1 + \frac{3R}{\alpha}\phi_2\\ N_2 I_2 &= R\left(1 + \frac{3}{\alpha}\right)\phi_2 + \frac{3R}{\alpha}\phi_1 \end{aligned}$$

Escalerizando, se obtiene:

$$\phi_1 = \frac{\alpha+3}{\alpha+4}\cdot\frac{\mu S_1 N_1}{3l}I_1 - \frac{1}{\alpha+4}\cdot\frac{\mu S_1 N_2}{l}I_2$$

Sustituyendo la ecuación 6 en la 4 o la 5 se obtiene:

$$\phi_2 = -\frac{1}{\alpha+4}\cdot\frac{\mu S_1 N_1}{l}I_1 + \frac{\alpha+1}{\alpha+4}\cdot\frac{\mu S_1 N_2}{l}I_2$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} L_1 &= N_1\frac{\partial\phi_1}{\partial I_1} = \frac{\alpha+3}{\alpha+4}\cdot\frac{\mu S_1 N_1^2}{3l}\\ L_2 &= N_2\frac{\partial\phi_2}{\partial I_2} = \frac{\alpha+1}{\alpha+4}\cdot\frac{\mu S_1 N_2^2}{l}\\ M &= N_1\frac{\partial\phi_1}{\partial I_2} = N_2\frac{\partial\phi_2}{\partial I_1} = -\frac{1}{\alpha+4}\cdot\frac{\mu S_1 N_1 N_2}{l} \end{aligned}$$

b) Por definición, $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$. Sustituyendo:

$$
\begin{aligned}
k &= -\frac{\mu S_1 N_1 N_2}{l} \cdot \frac{1}{\alpha+4}\sqrt{\frac{3l}{\mu S_1 N_1^2} \cdot \frac{\alpha+4}{\alpha+3} \cdot \frac{l}{\mu S_1 N_2^2} \cdot \frac{\alpha+4}{\alpha+1}} \\
k &= -\sqrt{\frac{3}{(3+\alpha)(1+\alpha)}}
\end{aligned}
$$

c) Las dos bobinas en serie con mutua se comportan como una bobina de inductancia equivalente $L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$ pues:

$$
\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 = j\omega L_1 I + j\omega M I + j\omega L_2 I + j\omega M I \\
V &= j\omega (L_1 + L_2 + 2M) I \\
L_{eq} &= L_1 + L_2 + 2M
\end{aligned}
$$

Donde V es la caída en la serie de las bobinas e I es la corriente que circula por ambas. En consecuencia, el circuito es un circuito tanque con una bobina L_{eq}. Planteamos el nudo de la fuente:

$$
\begin{aligned}
I &= I_R + I_C + I_L \\
I &= \frac{V_0}{R} + j\omega C V_0 + \frac{V_0}{j\omega L_{eq}} \\
I &= V_0 \left(\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L_{eq}} \right) \right)
\end{aligned}
$$

Finalmente, tomando parte real:

$$
i(t) = V_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L_{eq}} \right)^2} \cos(\omega t + \varphi)
$$

Con $\varphi = \arctan\left(\omega RC - \frac{R}{\omega L_{eq}} \right)$