1er parcial - Electromagnetismo 2014

13 de octubre de 2014

Solución Ejercicio 1:

a) El flujo del desplazamiento eléctrico a través de una superficie de radio r ($a < r < 2a$) es,

$$D4\pi r^2 = Q \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi r^2} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{a}{r}\right) \vec{E}$$

por lo que el campo eléctrico se escribe

$$\vec{E} = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r\,(r+a)} \quad \forall a < r < 2a$$

b) Podemos verificar que un potencial para el campo hallado no cumple la ecuación de Laplace;

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = -\nabla \cdot \vec{E} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{(r+a)} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{(r+a) - r}{(r+a)^2} = \frac{-Qa}{4\pi\varepsilon_0 r^2 (r+a)^2} \neq 0$$

lo que implica que no vale la ecuación de Laplace para todo $a \neq 0$.

c) la densidad volumétrica de carga polarizada está dada por,

$$\rho_P = -\nabla \cdot \left[\varepsilon_0 \frac{a}{r} \vec{E}\right] = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \varepsilon_0 \frac{a}{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r\,(r+a)}\right] = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{aQ}{4\pi\,(r+a)}\right] = \frac{aQ}{4\pi r^2 (r+a)^2}$$

mientras que las densidades superficiales de carga polarizada son,

$$\sigma_P\,(r = a) = \varepsilon_0 \frac{a}{r} \vec{E} \cdot (-\hat{r})\ |_{r=a} = \frac{-Q}{8\pi a^2}$$

$$\sigma_P\,(r = 2a) = \varepsilon_0 \frac{a}{r} \vec{E} \cdot \hat{r}\ |_{r=2a} = \frac{Q}{48\pi a^2}$$

d) La energía electrostática del sistema es,

$$U_E = \frac{1}{2} \int \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_a^{2a} \left(\frac{Q}{4\pi}\right)^2 \frac{r^2 \sin\varphi}{\varepsilon_0 r^3 (r+a)} dr \right) d\varphi \right) d\varphi = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_a^{2a} \frac{dr}{r\,(r+a)} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \log \frac{4}{3}$$

y se relaciona con la capacidad mediante

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{4\pi\varepsilon_0 a}{\log \frac{4}{3}}$$

Solución Ejercicio 2

a) Como cada medio es lineal, isótropo y homogéneo, vale

$$0 = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = g\nabla \cdot \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{g}{\varepsilon}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

lo que es una ecuación diferencial cuya solución resulta ser,

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-gt/\varepsilon}$$

Dado que $\rho_0 = 0$, entonces $\rho(t) = 0$ para todo tiempo.

b) Aplicamos la ecuación de continuidad teniendo en cuenta que la densidad de carga es nula en todo momento y obtenemos,

$$0 = \nabla \cdot \vec{J} = g\nabla \cdot \vec{E} = -g\nabla^2 \phi$$

lo que implica la ecuación de Laplace para el potencial.

c) Las condiciones de borde entre los dos medios se escriben,

$$E_1^{\|} = \vec{E}_1 \cdot \hat{s} \mid_{\varphi=0,\pi} = E_2^{\|} = \vec{E}_2 \cdot \hat{s} \mid_{\varphi=0,\pi}$$

$$\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) \cdot \hat{n} \mid_S = \left(\varepsilon_2 \vec{E}_2 - \varepsilon_1 \vec{E}_1\right) \cdot (\pm\hat{\varphi}) \mid_{\varphi=0,\pi} = 0$$

Si asumimos la sugerencia que da la letra tenemos,

$$\vec{E} = E\hat{s} = -\nabla\phi = -\frac{\partial \phi}{\partial s}\hat{s} - \frac{1}{s}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\hat{\varphi} - \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{z}$$

lo que implica $\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$ y por tanto queda $\vec{E} = E\left(s\right)\hat{s}$, y sustituyendo en las condiciones de borde obtenemos simplemente,

$$E_1 = E_2$$

ya que el producto escalar es nulo en la segunda condición.

Si ahora aplicamos la Ley de Gauss en su forma integral obtenemos,

$$Q = \oint \vec{D} \cdot \hat{n} dA = \int_0^L \left(\int_0^\pi \varepsilon_1 \vec{E} \cdot s\hat{s} d\phi\right) dz + \int_0^L \left(\int_\pi^{2\pi} \varepsilon_2 \vec{E} \cdot s\hat{s} d\phi\right) dz = \pi L \varepsilon_1 E s + \pi L \varepsilon_2 E s$$

por lo que

$$\vec{E} = \frac{Q\hat{s}}{\pi L\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right) s}$$

d) Calculo el flujo de $\vec{J}$ en un cilindro de radio $a < s < 3a$ y largo L.

$$\begin{aligned}
I &= \oint \vec{J} \cdot \vec{da} \\
I &= \int_0^L dz \int_0^\pi J_1\, s d\varphi + \int_0^L dz \int_\pi^{2\pi} J_2\, s d\varphi \\
I &= g_1 \int_0^L dz \int_0^\pi E_1\, s d\varphi + g_2 \int_0^L dz \int_\pi^{2\pi} E_2\, s d\varphi \\
I &= \frac{g_1 + g_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q
\end{aligned}$$

e) Como la densidad de carga $\rho = 0$ por la parte a), toda la carga encerrada dentro del cilindro es la del conductor interno. Por conservación de la carga:

$$\begin{aligned} I &= -\dot{Q} \\ -\dot{Q} &= \frac{g_1 + g_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} Q \\ Q(t) &= Q_0 e^{-\frac{g_1+g_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} t} \end{aligned}$$

f) Integramos la densidad volumétrica de energía dentro del condensador, pues afuera el campo es nulo

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}\, dV \\ U &= \int_0^L dz \int_0^{\pi} d\varphi \int_a^{3a} \frac{\varepsilon_1 E_1^2}{2}\, sds + \int_0^L dz \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int_a^{3a} \frac{\varepsilon_2 E_2^2}{2}\, sds \\ U &= \frac{\ln(3)}{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\pi L} Q^2(t) \\ U &= \frac{\ln(3)}{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\pi L} Q_0^2 e^{-2\frac{g_1+g_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} t} \end{aligned}$$

g) El sistema está aislado por lo que la energía disipada proviene de la energía electrostática del sistema. Entonces la potencia disipada es

$$\begin{aligned} P &= -\dot{U} \\ P &= \frac{(g_1+g_2)\ln(3)}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 \pi L} Q_0^2 e^{-2\frac{g_1+g_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} t} \end{aligned}$$