Electromagnetismo - Examen diciembre 2014

Solución

Ejercicio 1 a) El sistema está en estado estacionario por lo que $\nabla \wedge \vec{E} = \vec{0}$. En consecuencia, el campo eléctrico deriva de un potencial $\vec{E} = -\nabla\varphi$. Consideremos primero el exterior de la esfera. Como el sistema está en estado estacionario, la ecuación de continuidad queda $\nabla \cdot \vec{J} = 0$. Utilizando la ley de Ohm y la homogeidad del sistema:

$$0 = \nabla \cdot \vec{J} = g\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2\varphi$$

lo que da lugar a la ecuación de Laplace.

Consideremos ahora el interior de la esfera. Como esta está descargada, $\nabla \cdot \vec{D} = \epsilon\nabla \cdot \vec{E} = 0$. Sustituyendo la relación con el potencial:

$$0 = \nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2\varphi$$

lo que, nuevamente, prueba Laplace.

b) El sistema verifica la ecuación de Laplace. Además tomando como eje z el de $\vec{J}_0$, hay simetría azimutal. Es decir, que hay invariancia por rotaciones alrededor del eje z. Esto hace que el potencial sólo dependa de las variables en coordenadas esféricas r y θ. Por otro lado, en este problema, en cada región, la variable θ puede recorrer sin obstáculos todos los valores entre 0 y π. En esta situación, se probó en el teórico que toda solución a la ecuación de Laplace puede expresarse mediante la serie señalada en la letra.

c) Como no hay cargas concentradas en el orígen el potencial es regular en ese punto. Cuando $r \to \infty$, los efectos de la esfera son subdominantes respectos a la corriente externa aplicada. Por lo tanto, el campo eléctrico verifica $\vec{E} \to \vec{J}_0/g$. En términos del potencial esto es $\varphi \sim -(J_0/g)\, r\cos\theta$. Además, dado que la esfera es aislante, en el interior de esta no hay corriente eléctrica. Ahora bien, la componente normal a una frontera de la densidad de corriente eléctrica es continua. Al ser nula adentro de la esfera, dicha componente también es nula afuera $J^n_{afuera} = 0$. En coordenadas esféricas esto puede escribirse $\partial\varphi/\partial r\Big|_{r=a} = 0$. Finalmente, como el campo eléctrico es irrotacional en un problema estacionario, la componente transversal al borde del campo eléctrico en la frontera es continua. Como se vio en teórico, esto último es equivalente a solicitar que el potencial eléctrico sea continuo en el borde.

d) Procedemos a calcular el potencial afuera de la esfera. Dado el comportamiento para r grande, concluimos que todos los A_n y los B_n son nulos salvo $A_1 = -J_0/g$ y A_0 que no queda determinado por esta condición pero lo tomamos nulo por medio de una elección apropiada del nivel cero del potencial. Con esta información el potencial toma la forma

$$\varphi(r,\theta) = -\frac{J_0}{g} r\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n-1} B_n P_n(\cos\theta)$$

Podemos entonces calcular la derivada con respecto a r:

$$\frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial r} = -\frac{J_0}{g}\cos\theta - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

Entonces podemos imponer que $\partial\varphi/\partial r\Big|_{r=a}$ sea nulo para todo θ:

$$\left.\frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial r}\right|_{r=a} = -\frac{J_0}{g}\cos\theta - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{B_n}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta) = 0$$

Como los polinomios de Legendre son linealmente independientes, todos sus coeficientes son nulos, por lo que los B_n son nulos salvo $B_1 = -a^3 J_0/(2g)$. Concluimos que la forma del potencial queda:

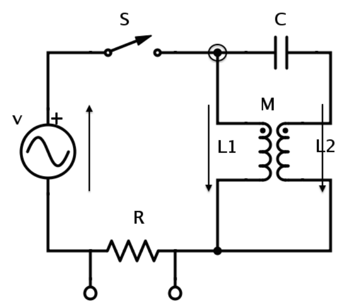
$$\varphi(r,\theta) = -\frac{J_0}{g}\cos\theta\Big(r + \frac{a^3}{2r^2}\Big)$$

Vale la pena mencionar que podemos calcular el potencial afuera sin hacer referencia al potencial adentro.

e) Del punto anterior podemos deducir $\vec{J} = -g\nabla\varphi$:

$$\vec{J}(r,\theta) = J_0 \cos\theta\Big(1 - \frac{a^3}{r^3}\Big)\vec{e}_r - J_0 \mathrm{sen}\theta\Big(1 + \frac{a^3}{2r^3}\Big)\vec{e}_\theta$$

Ejercicio 2



a) Las ecuaciones de mallas para los sentidos de las corrientes elegidos junto con la ecuación del nodo señalado se escriben,

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ V = i\omega\left(L_1 I_1 + M I_2\right) + RI \\ V = \frac{I_2}{i\omega C} + i\omega\left(L_2 I_2 + M I_1\right) + RI \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} V = \left(R + i\omega L_1\right) I + i\omega\left(M - L_1\right) I_2 \\ V = \left(R + i\omega M\right) I + i\left(\omega L_2 - \omega M - \frac{1}{\omega C}\right) I_2 \end{cases}$$

siendo $V = V_0 e^{i\omega t}$. Resolviendo el sistema para I se obtiene,

$$\left[\omega\left(L_1 + L_2 - 2M\right) - \frac{1}{\omega C}\right] V = \left[R\left(\omega\left(L_1 + L_2 - 2M\right) - \frac{1}{\omega C}\right) + i\left(\omega^2\left(L_1 L_2 - M^2\right) - \frac{L_1}{C}\right)\right] I$$

Como $M = \sqrt{L_1 L_2}$ tenemos,

$$I = \frac{\omega\left(L_1 + L_2 - 2M\right) - \frac{1}{\omega C}}{R\left(\omega\left(L_1 + L_2 - 2M\right) - \frac{1}{\omega C}\right) - i\frac{L_1}{C}} V = \frac{V}{R - \frac{i L_1/C}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}} = \frac{R + \frac{i\omega L_1}{\omega^2 LC - 1}}{R^2 + \left(\frac{\omega L_1}{\omega^2 LC - 1}\right)^2} V_0 e^{i\omega t}$$

donde hemos definido $L = L_1 + L_2 - 2M$. Por lo tanto obtenemos,

$$v_R = \Re\left[RI\right] = \frac{V_0 \cos\left(\omega t + \phi\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L_1/R}{\omega^2 LC - 1}\right)^2}}$$

$$\tan\phi = \frac{\omega L_1/R}{\omega^2 LC - 1}$$

b)

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\Re\left[VI^*\right] = \frac{1}{2}\Re\left[\frac{R - \frac{i\omega L_1}{\omega^2 LC-1}}{R^2 + \left(\frac{\omega L_1}{\omega^2 LC-1}\right)^2} V_0\right] = \frac{V_0}{2R\left[1 + \left(\frac{\omega L_1/R}{\omega^2 LC-1}\right)^2\right]}$$

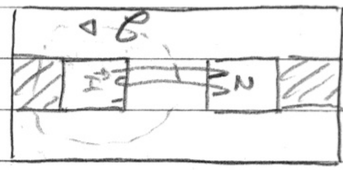
$$\frac{d\bar{P}}{d\omega} = \frac{-V_0 2\left(\frac{\omega L_1/R}{\omega^2 LC-1}\right)\frac{\omega^2 LC L_1/R - L_1/R - 2\omega^2 LC L_1/R}{(\omega^2 LC-1)^2}}{2R\left[1 + \left(\frac{\omega L_1/R}{\omega^2 LC-1}\right)^2\right]^2} = \frac{V_0\omega\left(L_1/R\right)^2\left(\omega^2 LC+1\right)\left(\omega^2 LC-1\right)}{R\left[\left(\omega^2 LC-1\right)^2 + \left(\omega L_1/R\right)^2\right]^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega\left(\omega^2 LC+1\right)\left(\omega^2 LC-1\right) = \omega\left(\omega^4 L^2 C^2 - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Verificar que $\bar{P}(\omega_0)$ es el mínimo de $\bar{P}$ es inmediato al evaluar los límites $\lim\limits_{\omega\to 0,+\infty}\bar{P} = \frac{V_0}{2R}$, $\lim\limits_{\omega\to\omega_0}\bar{P} = 0$.

Ejercicio 3

a)



Por Ampere $\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$

Material de $\mu \gg \mu_0$: $\vec{H}_\mu = \frac{1}{\mu} \vec{B}_\mu$

$\vec{B}_\mu = 0$

$\Rightarrow \vec{H}_\mu = 0$

Material con $\vec{M}$ fija : $\vec{H}_M = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_M - \vec{M}$

$\vec{B}_M = 0$

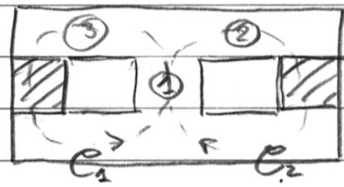
$\Rightarrow \vec{H}_M = -\vec{M}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow M_0 l = NI \Rightarrow \boxed{I = \frac{M_0 l}{N}}$

Por simetría la rama derecha tambien tiene $\vec{B} = 0$.

b)



Por Ampere

$$\begin{cases} \oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow H_3 \, 2l + H_1 l + \frac{B_3}{\mu_0} l - M_0 l = 0 \\ \oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow H_2 \, 2l + H_1 l + \frac{B_2}{\mu_0} l + M_0 l = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \nabla \vec{B} = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2 + \phi_3 \\ \qquad\qquad S \text{ cte} \end{array}\right\} \Rightarrow B_1 = B_2 + B_3$$

Material con $\mu \gg \mu_0$:
$$\begin{cases} H_1 = \frac{B_1}{\mu} \\ H_2 = \frac{B_2}{\mu} \\ H_3 = \frac{B_3}{\mu} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_1 = B_2 + B_3 \\ B_3 \frac{2}{\mu} + B_1 \frac{1}{\mu} + B_3 \frac{1}{\mu_0} - M_0 = 0 \\ B_2 \frac{2}{\mu} + B_1 \frac{1}{\mu} + B_2 \frac{1}{\mu_0} + M_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_1 = 0 \Rightarrow H_1 = 0 \\ B_2 = -M_0 \frac{\mu \mu_0}{2\mu_0 + \mu} \Rightarrow H_2 = -M_0 \frac{\mu_0}{2\mu_0 + \mu} \approx -M_0 \frac{\mu_0}{\mu} \\ B_3 = M_0 \frac{\mu \mu_0}{2\mu_0 + \mu} \Rightarrow H_3 = M_0 \frac{\mu_0}{2\mu_0 + \mu} \approx M_0 \frac{\mu_0}{\mu} \end{cases}$$

Dentro de los materiales con $\vec{M}$ fija:

izquierda: $H_{M_I} = \frac{B_3}{\mu_0} - M_0 = -M_0 \frac{2\mu_0}{2\mu_0 + \mu} \approx -M_0 \, 2 \frac{\mu_0}{\mu}$

derecha: $H_{M_D} = \frac{B_2}{\mu_0} + M_0 = M_0 \frac{2\mu_0}{2\mu_0 + \mu} \approx M_0 \, 2 \frac{\mu_0}{\mu}$