Solución ejercicio 1

1) Tomando como origen el centro de la espira y usando coordenadas cilíndricas, tenemos que la posición del punto de observación es $\vec{r}_2 = z\vec{k}$, la posición de un punto genérico sobre la espira es $\vec{r}_1 = a\vec{e}_r$ y el elemento de curva sobre la espira es $\vec{dl}_1 = -ad\varphi\vec{e}_\varphi$. En la última expresión se utilizó la orientación de la corriente señalada en la figura. Sustituyendo en la ley de Biot y Savart obtenemos:

$$\begin{aligned} \vec{B}(z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi a(-\vec{e}_\varphi) \times \frac{z\vec{k} - a\vec{e}_r}{(z^2+a^2)^{3/2}} && (1) \\ &= -\frac{\mu_0 I a}{4\pi(z^2+a^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi(z\vec{e}_r + a\vec{k}) && (2) \end{aligned}$$

Pero, la integral de la componente radial se anula:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\vec{e}_r = \int_0^{2\pi} d\varphi(\cos\varphi\vec{i} + \mathrm{sen}\varphi\vec{j}) = \vec{0}$$

La componente según $\vec{k}$ se hace de manera inmediata. En consecuencia:

$$\vec{B}(z) = -\frac{\mu_0 I a^2\vec{k}}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$$

Esto prueba el módulo del campo magnético anunciado en la letra y además muestra que la dirección es según el eje de la espira y, dada la orientación de I es hacia los z negativos.

2) El signo del flujo del campo magnético en la pequeña bobina depende de cómo la orientemos. Para fijar ideas, supongamos que orientamos la bobina de tal manera que el vector director de ésta tiene una proyección según z positiva. En ese caso, dado el sentido de $\vec{B}(z)$, el flujo será negativo. Para calcular el valor absoluto, tomamos en cuenta que la bobina es muy pequeña y por lo tanto el flujo por una de sus espiras es $\Phi^{1espira} = |\vec{B}(z)|A\cos\Theta$, siendo Θ el ángulo que forma la normal a la superficie con el eje z (con la orientación antes mencionada). Dado que la bobina tiene N espiras, deducimos:

$$\Phi_B = -\frac{\mu_0 I a^2\cos\Theta}{2(z^2+a^2)^{3/2}}AN$$

Derivando con respecto a I deducimos la inductancia mutua cuyo módulo es:

$$|M| = \frac{\mu_0 a^2\cos\Theta}{2(z^2+a^2)^{3/2}}AN$$

(el signo depende de cómo orientemos la bobina).

3) Dado que despreciamos la autoinducción en la espira, $RI_{ind}(t) = \mathcal{E}$, siendo $\mathcal{E}$ la f.e.m. inducida por la bobina pequeña en la grande e $I_{ind}(t)$ la corriente inducida en la espira grande. Ahora bien, las inductancias mutuas entre dos bobinas son iguales. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_{ind}(t) &= -\frac{M}{R}\dot{I}_2(t) = \frac{\mu_0 a^2 \cos\Theta}{2R(z^2+a^2)^{3/2}} AN\dot{I}_2(t) \\ &= -\frac{\mu_0 a^2 \cos\Theta}{2R(z^2+a^2)^{3/2}} ANI_0\omega \mathrm{sen}(\omega t) \end{aligned}$$

Aquí el signo es púramente convencional, dado que no se precisó en la letra la orientación de la corriente $I_2(t)$.