Montevideo, setiembre 2013.

Solución Problema 2:

1) Como el problema es estacionario, el campo eléctrico es irrotacional y la densidad de corriente es de divergencia nula (pues la densidad volumétrica de carga no depende del tiempo):

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \vec{E} &= \vec{0} \\ \nabla \cdot \vec{J} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Ahora, como por la ley de Ohm, $\vec{J} = g\vec{E}$, y g es uniforme, el campo eléctrico también tiene divergencia nula. Además, un campo irrotacional en un dominio simplemente conexo deriva de un potencial, por lo que $\vec{E} = -\nabla\varphi$. Concluimos que

$$0 = \nabla \cdot \vec{J} = g\nabla \cdot \vec{E} = -g\nabla^2\varphi \tag{2}$$

lo que prueba la validez de la ecuación de Laplace en todo el conductor.

2) Consideremos primero el comportamiento para r (la distancia al centro de la esfera) grande. En ese régimen, $\vec{J} \to \vec{J_0}$. En consecuencia, $\vec{E} \to \vec{J_0}/g$. Elijamos un sistema de coordenadas con su eje z según $\vec{J_0}$. Como $\vec{E}$ es (menos) el gradiente del potencial y a grandes distancias el campo eléctrico tiende a una constante, el potencial del que deriva tiene por equivalente una función que crece linealmente con la posición según $\vec{J_0}$ (es decir, z). En consecuencia:

$$\varphi \sim -\frac{J_0}{g}z = -\frac{J_0}{g}r\cos\theta, \tag{3}$$

siendo θ, el ángulo formado por el radio que va del centro de la esfera al punto de obervación con el eje Oz.

Ahora, consideremos las condiciones de borde en la superficie de la esfera. Como el campo eléctrico es irrotacional tenemos, como en el caso electrostático que la componente tangencial del campo eléctrico es continua en el pasaje del dieléctrico al conductor (pero no utilizaremos dicha condición). Además, como el sistema está en régimen estacionario, el flujo en cualquier superficie cerrada de la densidad de corriente es nulo (debido a que la carga en el interior de dicha superficie no cambia con el tiempo). En consecuencia, tomando un pequeño cilindro achatado con tapas de un lado y otro de la frontera entre el conductor y el aislante concluimos que la componente normal a la superficie de la esfera es continua al pasar del aislante al conductor. Ahora bien, en el aislante no hay corriente eléctrica y por lo tanto, la corriente en el conductor en la superficie de contacto con la esfera tiene componente normal nula. Como la superficie es una esfera, la componente normal, no es otra cosa que la componente radial, por lo que concluímos que

$$J_r(r=a) = -g\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=a} = 0 \tag{4}$$

para todo valor de los ángulos polares θ y ϕ.

3) Como el potencial eléctrico verifica la ecuación de Laplace en todo el conductor, todas las las condiciones de borde tienen simetría azimutal y además el ángulo θ puede recorrer todos los valores entre 0 y π dentro del conductor, entonces, tal como se vio en el teórico, el potencial puede desarrollarse en una base de la forma

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\big(A_n r^n + B_n r^{-n-1}\big) \tag{5}$$

siendo los $P_n(\cos\theta)$ polinomios en la variable $\cos\theta$ llamados polinomios de Legendre.

Impongamos entonces las condiciones de borde a dicha solución. Primero que nada, dado el comportamiento para r grande, todos los términos que crecen más rápido que linealmente en r deben tener coeficientes nulos. Por lo tanto $A_n = 0$ para todo $n \geq 2$. Además dado el equivalente determinado en la sección anterior, el término que crece linealmente con r debe verificar:

$$A_1 r\cos\theta = -\frac{J_0}{g} r\cos\theta \tag{6}$$

pues $P_1(\cos\theta) = \cos\theta$. En consecuencia: $A_1 = -J_0/g$. Además, podemos sumar libremente una constante al potencial. Por ello, podemos tomar la *convención* de elegir en este caso $A_0 = 0$. Habiendo impuesto estas condiciones, el potencial se ha simplificado a la forma:

$$\varphi(r,\theta) = -\frac{J_0}{g} r\cos\theta + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\frac{B_n}{r^{n+1}} \tag{7}$$

Podemos calcular entonces la derivada radial del potencial:

$$\frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial r} = -\frac{J_0}{g}\cos\theta - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_n(\cos\theta)\frac{B_n}{r^{n+2}} \tag{8}$$

Por la condición de borde (4) deducimos entonces que:

$$0 = \frac{\partial \varphi(r,\theta)}{\partial r}\Big|_{r=a} = -\frac{J_0}{g}\cos\theta - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_n(\cos\theta)\frac{B_n}{a^{n+2}} \tag{9}$$

para todo ángulo θ. Ahora bien, los polinomios de Legendre son linealmente independientes. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} B_0 &= 0 \\ -2\frac{B_1}{a^3} - \frac{J_0}{g} &= 0 \\ B_n &= 0 \qquad \text{para todo}\, n \geq 2 \end{aligned} \tag{10}$$

En consecuencia la solución para el potencial es:

$$\varphi(r,\theta) = -\frac{J_0}{g}\cos\theta\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right) \tag{11}$$