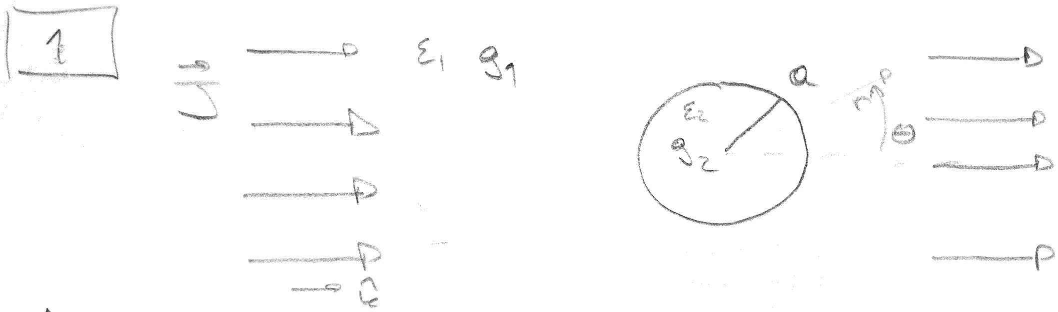


$\vec{J}(r\to\infty) = J_0\hat{k}$

Como me encuentro en estado estacionario $\nabla\cdot\vec{J}=0$

$\Rightarrow \nabla^2\phi = 0$ en todo el espacio (menos la interfase)

Por simetría cilíndrica la solución de Laplace es:

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n})\cos(n\theta) + (C_n r^n + D_n r^{-n})\,\mathrm{sen}(n\theta) + E\ln(r) + F$$

tengo $\phi_1(r,\theta)$ solución para $r \geq a$

$\phi_2(r,\theta)$ " " $r \leq a$

$$\phi_1(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n})\cos(n\theta) + (C_n r^n + D_n r^{-n})\,\mathrm{sen}(n\theta) + A_0\ln(r) + B_0$$

$$\phi_2(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (G_n r^n + M_n r^{-n})\cos(n\theta) + (I_n r^n + K_n r^{-n})\,\mathrm{sen}(n\theta) + G_0\ln(r) + H_0$$

a) condiciones de Borde para el potencial:

En la superficie no se está acumulando carga

$$\vec{J}_1\cdot\hat{n}_1 + \vec{J}_2\cdot\hat{n}_2\Big|_{r=a} = -\dot{\sigma} = 0 \quad \| \to (\vec{J}_2 - \vec{J}_1)\cdot\hat{e}_r\Big|_{r=a} = 0$$

$\hat{n}_1 = -\hat{e}_r = -\hat{n}_2$

En función de los coef ...

$\vec{J}_1 = -g_1\nabla\phi_1 \quad \to \quad \vec{J}_1\cdot\hat{e}_r = -g_1\dfrac{d\phi_1}{dr}$

$\vec{J}_2 = -g_2\nabla\phi_2 \quad\quad \vec{J}_2\cdot\hat{e}_r = -g_2\dfrac{d\phi_2}{dr}$

$$\Rightarrow \left(g_1\frac{d\phi_1}{dr} - g_2\frac{d\phi_2}{dr}\right)\Bigg|_{r=a} = 0 \quad (i)$$

Las otras C.B. son:

ii) $\Phi_1(r \to \infty, \theta) = -\frac{J_0}{g_1} r \cos\theta$

iii) $\Phi_2(r \to 0, \theta) =$ debe ser acotado

Vi) $\Phi_1(a, \theta) = \Phi_2(a, \theta)$

b) A partir de estas condiciones de Borde:

i) $\begin{cases} A_1 = -\frac{J_0}{g_1} \quad A_n = 0 \ \forall n > 1 \text{ y tomo } B_0 = 0 \\ C_n = 0 \quad \forall n \end{cases}$

ii) $\begin{cases} H_n = 0 = K_n \ \forall n \\ G_0 = 0 \end{cases}$

iii) $H_0 = A_0 \ln(a)$ (I)

$$\left(A_1 a + B_1 a^{-1}\right)\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} B_n a^{-n} \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n a^{-n} \operatorname{sen}(n\theta)$$

$$= G_1 a \cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty} G_n a^n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n a^n \operatorname{sen}(n\theta)$$

$A_1 a + B_1 a^{-1} = G_1 a$ (II)

$B_n a^{-n} = G_n a^n \quad \forall n > 1$ (III)

$D_n a^{-n} = I_n a^n \quad \forall n \geq 1$ (IV)

usando el resultado de la parte a) (i)

$$g_1\left[\left(A_1 - B_1 a^{-2}\right)\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty}(-n) B_n a^{-(n+1)} \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}(-n) D_n a^{-(n+1)} \operatorname{sen}(n\theta)\right]$$

$$+\frac{A_0}{a} - g_2\left[G_1 \cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty}(+n) G_n a^{n-1} \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}(+n) I_n a^{n-1} \operatorname{sen}(n\theta)\right] = 0$$

$\Rightarrow \left(A_1 - B_1 a^{-2}\right) g_1 = g_2 G_1$ (V)

$-g_1 n B_n a^{-(n+1)} = n G_n a^{n-1} g_2$ (VI)

$-g_1 n D_n a^{-(n+1)} = I_n a^{n-1} g_2 n$ (VII)

$A_0 = 0$ (VIII)

de: III y VI $B_n = G_n = 0 \quad \forall n \geq 2$

IV y VII $D_n = \cancel{E}_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

II y IV $A_1 + B_1 a^{-2} = \frac{g_1}{g_2}\left(A_1 - B_1 a^{-2}\right)$

VIII y I $H_0 = 0$

$$\frac{B_1 a^{-2}}{\cancel{g_2}}(g_1 + g_2) = \frac{A_1}{\cancel{g_2}}(g_1 - g_2)$$

$$B_1 = a^2 A_1 \frac{(g_1 - g_2)}{g_1 + g_2} \qquad \boxed{B_1 = \frac{J_0}{g_1} a^2 \frac{(g_2 - g_1)}{g_1 + g_2}}$$

$$\Rightarrow G_1 = -\frac{J_0}{g_1} + \frac{J_0}{g_1}\frac{(g_2 - g_1)}{g_1 + g_2}$$

$$\boxed{G_1 = \frac{J_0(-2)}{g_1 + g_2}}$$

$$\phi_1(r,\theta) = \frac{J_0}{g_1}\left(\frac{(g_2 - g_1)}{g_1 + g_2}\frac{a^2}{r} - r\right)\cos(\theta)$$

$$\phi_2(r,\theta) = \frac{-2J_0}{g_1 + g_2} r\cos\theta$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1(r,\theta) = -\frac{J_0}{g_1}\left(-\frac{(g_2 - g_1)}{g_1 + g_2}\frac{a^2}{r^2} - 1\right)\cos\theta\,\hat{e}_r + \frac{J_0}{g_1}\left(\frac{g_2 - g_1}{g_1 + g_2}\frac{a^2}{r^2} - 1\right)\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\theta$$

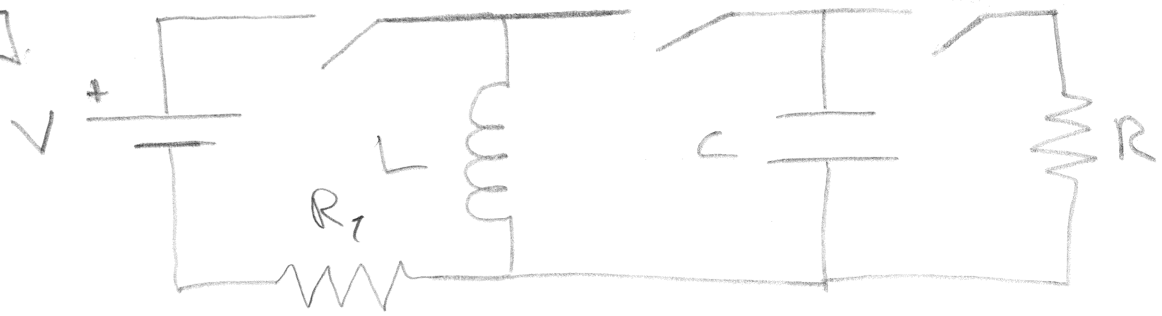
$$\vec{E}_2(r,\theta) = \frac{2J_0}{g_1 + g_2}\cos\theta\,\hat{e}_r - \frac{2J_0}{g_1 + g_2}\operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_\theta$$

c) $P = \int \vec{J}\cdot\vec{E}\,dV \qquad \vec{J}_2 = g_2 \vec{E}_2$

$$P = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz\, g_2 \frac{4J_0^2}{(g_1+g_2)^2} r\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) = L\, 2\pi \frac{a^2}{2}\frac{J_0^2\, 4}{(g_1+g_2)^2}$$

$$\boxed{\frac{P}{L} = \frac{4J_0^2 a^2 \pi}{(g_1+g_2)^2}}$$

2



a) circuito VL

$i(0)=0$

$V = L\frac{di}{dt} + R_1 i \qquad \frac{1}{V-R_1 i}\,di = \frac{1}{L}\,dt \rightarrow -\frac{1}{R_1}\ln\left(\frac{V-R_1 i(t)}{V-i(0)}\right) = \frac{1}{L}t$

$V - R_1 i(t) = V e^{-\frac{R_1}{L}t} \rightarrow \boxed{i(t) = \frac{V}{R_1}\left(1-e^{-\frac{R_1}{L}t}\right)}$

si t_1 muy grande $i(t_1) \approx \frac{V}{R_1}$

b) $-L\frac{di}{dt} = \frac{q}{C} \rightarrow -\ddot{q} = \frac{1}{LC}q \rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$

$\lambda^2 + a = 0 \qquad \lambda = \pm\sqrt{a} \qquad q(t) = q_0\cos(\omega t + \phi)$

$q(t_1) = 0$

$q(t) = q_0\cos(\omega t + \phi) \qquad \omega^2 = \frac{1}{LC}$

$\boxed{\phi = \frac{\pi}{2} - \omega t_1 + n\pi \quad n \in \mathbb{Z}}$

$i(t) = \mp\omega q_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$

$i(t_1) = \mp\omega q_0 = \frac{V}{R_1} \qquad \boxed{q_0 = \mp\frac{V}{R_1}\frac{1}{\omega}}$

corriente por L en $t=t_1$

$q(t) = -\frac{V}{R_1}\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \phi) \qquad \boxed{V_c(t) = -\frac{V}{R_1\omega C}\cos(\omega t + \phi)}$

c) RC descarga

$-\frac{q}{C} = \dot{q}R \qquad -\frac{1}{RC}dt = \frac{1}{q}dq$

$-\frac{1}{RC}(t-t_2) = \ln(q(t)) - \ln(q(t_2))$

$\rightarrow \boxed{q_2(t_2)\, e^{-\frac{(t-t_2)}{RC}} = q(t)}$

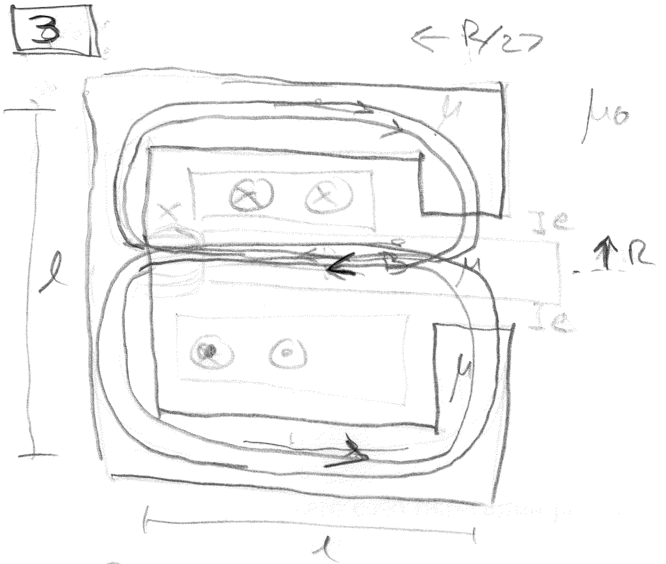
Para disipar el máximo de energía la carga en el condensador debe ser máxima

$$q(t_2) = q_0 \iff \omega t_2 + \frac{\pi}{2} - \omega t_1 + n\pi = 0$$

en ese instante $|V_c(t_2)| = \frac{V}{R_1 \omega C}$ y es máx

la energía q' se va a disipar es: $U = \frac{1}{2} C V_c^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{C} \frac{V^2}{(R_1\omega)^2}$ y es la máxima energía disipada en la resistencia

3



$\mu >> \mu_0$

$\mathcal{R}_\mu = \frac{x}{\mu S}$; $\mathcal{R}_0 = \frac{x}{\mu_0 S}$ como $\frac{x}{\mu_0}, \frac{e}{\mu_0} >> \frac{R}{\mu}, \frac{L}{\mu}$

$\mathcal{R}_\mu$ despreciable

$\mathcal{R}_x = \frac{1}{\mu_0}\frac{x}{\pi R^2}$; $\mathcal{R}_e = \frac{1}{\mu_0}\frac{e}{(2\pi R)\frac{R}{2}} = \frac{1}{\mu_0}\frac{e}{\pi R^2}$

$\phi(\mathcal{R}_x + \mathcal{R}_e) = NI$

$\phi = \frac{NI}{x+e}\mu_0 \pi R^2$ $\quad \phi_b = N\phi = \frac{\mu_0 \pi R^2}{x+e} N^2 I$

$$\boxed{L(x) = \frac{\mu_0 \pi R^2 N^2}{x+e}}$$

$U = \frac{1}{2} L I^2$ cuando se calcula la fuerza a corriente constante la relación es:

$$\boxed{F_x = \left.\frac{dU}{dx}\right|_I}$$

$F_x = \left.\frac{dU}{dx}\right|_I = -\frac{1}{2} I^2 \frac{\mu_0 \pi R^2 N^2}{(x+e)^2}$

$\vec{F} = F_x \hat{c}$