Segundo parcial de Funciones de Variable Compleja.

27 de junio de 2011.

Núm. examen

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Nota: Cada parte vale 6 puntos, con un máximo de 60. La duración del parcial es de 3 horas.

1. *a*) Enunciar y demostrar el teorema de Rouché. (Podrá usarse, enunciándolo completamente y sin demostrar, el teorema del argumento o el teorema de los residuos).

   b) Demostrar que el polinomio $P(z)$ siguiente tiene exactamente 8 ceros contando cada uno tantas veces como su multiplicidad, en el interior del círculo $|z| \leq 1$:

$$P(z) = (3+i)z^{10} + \sqrt{2}z^9 + (21-9i)z^8 + (4-i)z^2 - 7iz + 1$$

   (Sugerencia: comparar con $Q(z) = (21-9i)z^8$ para $|z| = 1$ y aplicar el teorema de Rouché.)

2. Sea $f(z) = ze^{iz}/(1+z^2)^2$.

   a) Encontrar todos los polos de $f(z)$ en el plano complejo, determinar sus órdenes respectivos y calcular el residuo de $f(z)$ en cada uno de sus polos.

   b) Calcular

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\, dz$$

   donde γ_R es la curva cerrada, orientada en sentido antihorario, determinada para $R \geq 2$ real constante, por la igualdad $\gamma_R = [-R, R] + S_R$,
   donde $[-R, R]$ es el segmento de recta $z = x$ real tal que $-R \leq x \leq R$,
   y S_R es la semicircunferencia $S_R : z = Re^{it}$ donde t es un parámetro real tal que $0 \leq t \leq \pi$.

   c) Calcular, justificando cada paso, $\lim_{R\to+\infty} I_R$, donde I_R es la integral de la parte b).
   Sugerencia: utilizar, enunciándolo completamente sin demostración, alguna versión del Lema de Jordan o de deformación de curvas.

   d) Calcular, justificando cada paso,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

   Sugerencia: Probar que $(x \operatorname{sen} x)/(1+x^2)^2$ es la parte imaginaria de la función compleja $f(z)$ dada al principio de este ejercicio, y usar los resultados obtenidos en las partes anteriores.

3. Se denota como $[\mathcal{L}(f(t))](p) = F(p)$ (definida para todo p complejo tal que $Re(p) > a$, donde a es una constante real), a la transformada de Laplace de una función $f(t)$ Laplace-transformable, de variable real t. (Recordar en particular que $f(t) = 0$ para todo $t < 0$.)

   a) Probar, que si $b > 0$ es una constante real cualquiera positiva, entonces $[\mathcal{L}(f(t-b))](p) = e^{-pb}F(p)$ para todo p complejo tal que $Re(p) > a$.

   b) Probar que si b es una constante real cualquiera, entonces $[\mathcal{L}(e^{tb}f(t))](p) = F(p-b)$ para todo p complejo tal que $Re(p) > a + b$.

   c) Probar que si $b > 0$ es una constante real cualquiera positiva, entonces
   $[\mathcal{L}(e^{tb}f(t-b))](p) = e^{-pb+b^2}F(p-b)$ para todo p complejo tal que $Re(p) > a + b$.

   d) Encontrar, usando la transformada de Laplace, la solución $x(t)$ de

$$\dot{x} - x = e^{2t} \quad \forall\, t \geq 0, \quad x(0) = 1.$$