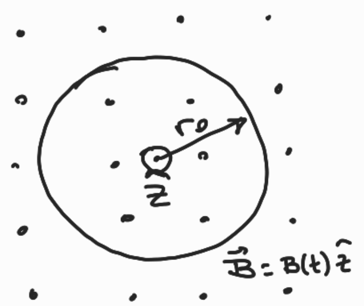
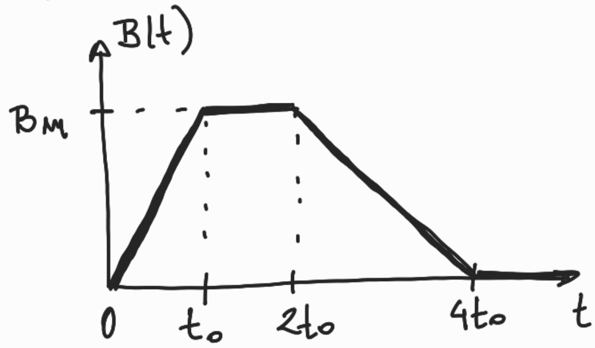
Solución - Física 3 - Segundo parcial - 2/12/24

Ejercicio 1





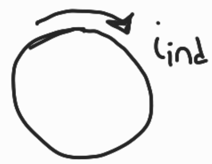
a y b)

De la ley de Faraday $\varepsilon = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$ con $\Phi_B = \int_S \underbrace{\vec{B}}_{B\hat{z}} \cdot \underbrace{\hat{n}}_{\hat{z}}\, da = B(t)(\pi r_0^2)$

$\Rightarrow \varepsilon = -(\pi r_0^2)\dfrac{dB(t)}{dt}$

$0 < t < t_0 \rightarrow \dfrac{dB}{dt} = \dfrac{B_M}{t_0} \Rightarrow \boxed{\varepsilon(t) = -\pi r_0^2 \dfrac{B_M}{t_0}}$

$\boxed{i_{ind} = \dfrac{\varepsilon(t)}{R} = \dfrac{-\pi r_0^2 B_M}{t_0 R}}$



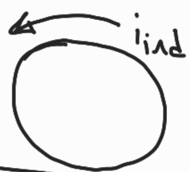
el signo de (-) obedece a que la fem inducida tiende a oponerse al aumento de flujo (sentido contrario al establecido por la regla de la mano derecha para $\hat{n} = \hat{z}$)

$t_0 < t < 2t_0 \rightarrow \dfrac{dB}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon = 0} \rightarrow \boxed{i_{ind} = \dfrac{\varepsilon}{R} = 0}$

Al no haber variación de flujo del campo $\vec{B}$, no se induce fem ni corriente

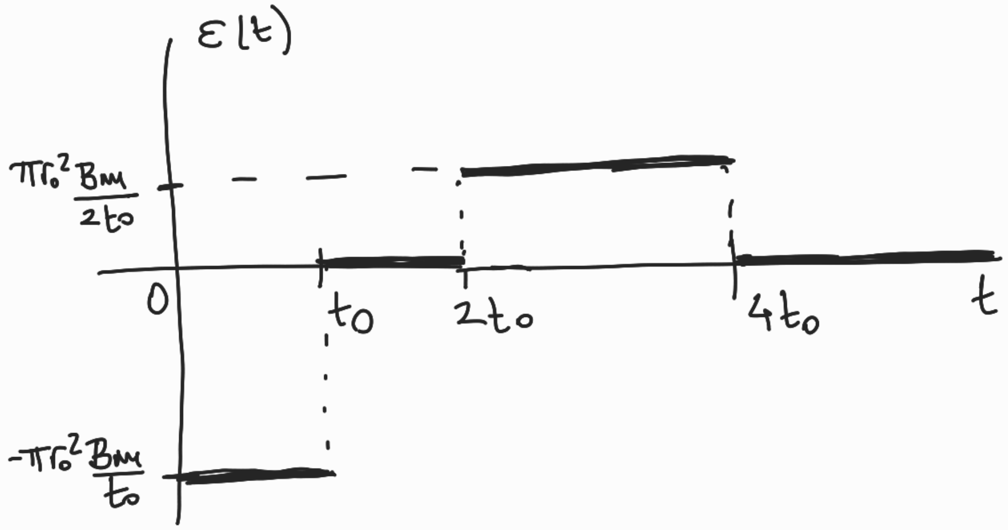
$2t_0 < t < 4t_0 \rightarrow \dfrac{dB}{dt} = -\dfrac{B_M}{2t_0} \Rightarrow \boxed{\varepsilon(t) = -\pi r_0^2\left(-\dfrac{B_M}{2t_0}\right) = \pi r_0^2 \dfrac{B_M}{2t_0}}$

$\Rightarrow \boxed{i_{ind} = \dfrac{\varepsilon}{R} = \dfrac{\pi r_0^2 B_M}{2t_0 R}}$



La fem tiende a oponerse a la disminución del flujo del campo $\vec{B}$

$t > 4t_0 \Rightarrow \dfrac{dB}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{\varepsilon = 0} \rightarrow \boxed{i_{ind} = 0}$



c)

$$\boxed{P_R(t) = R\, i_{ind}^2(t)} = \begin{cases} R\left(\pi r_0^2 \dfrac{B_m}{t_0 R}\right)^2 = \boxed{\dfrac{\pi^2 r_0^4 B_m^2}{t_0^2 R}} \; ; & 0<t<t_0 \\ \boxed{0} \; ; & t_0<t<2t_0 \\ R\left(\pi r_0^2 \dfrac{B_m}{2t_0 R}\right)^2 = \boxed{\dfrac{\pi^2 r_0^4 B_m^2}{4t_0^2 R}} \; , & 2t_0<t<4t_0 \\ \boxed{0} \; , & t>4t_0 \end{cases}$$

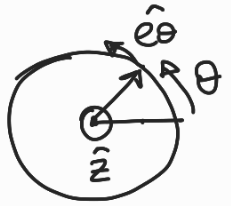
$$\boxed{U_{dis.}^{(total)} = \int_0^t P(t)\,dt = \left(\frac{\pi^2 r_0^4 B_m^2}{t_0^2 R}\right)t_0 + \left(\frac{\pi^2 r_0^4 B_m^2}{4t_0^2 R}\right)(2t_0) = \frac{3}{2}\,\frac{\pi^2 r_0^4 B_m^2}{t_0 R}}$$

d) El campo eléctrico inducido tiene su origen en la variación temporal del flujo de $\vec{B}$ (ley de Faraday)

$$\oint_{C\,(\text{antih})} \vec{E}_{ind}\cdot d\vec{l} = \varepsilon \quad \left(\text{“}-\frac{d\Phi_B}{dt}\text{”}\right)$$

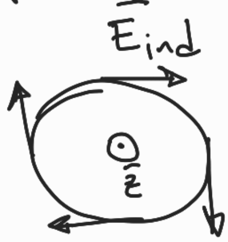
$$\Rightarrow E_{ind}(r_0)\,(2\pi r_0) = \varepsilon$$

$$\vec{E}_{ind}(r_0) = \frac{\varepsilon}{2\pi r_0}\,\hat{e}_\theta$$



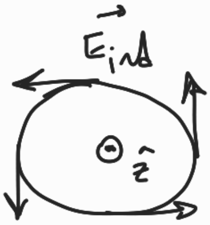
Por ley de Gauss podemos afirmar que el campo eléctrico debe ser tangente a la espira (si tuviera componente radial habría un flujo no nulo a través de una superf. gauss. cilíndrica perpendicular al plano de la espira, lo que implicaría la existencia de una carga neta encerrada) Además por la simetría, E_{ind}, debe tener la misma magnitud en todos los puntos de la espira

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{ind}(r_0)} = \frac{-\cancel{\pi} r_0^{\cancel{2}} B_m}{2\cancel{\pi}\,\cancel{r_0}\; t_0}\,\hat{e}_\theta = \boxed{\frac{B_m r_0}{2\,t_0}(-\hat{e}_\theta)} , \quad 0<t<t_0$$



$$= \boxed{0} , \quad t_0<t<2t_0$$

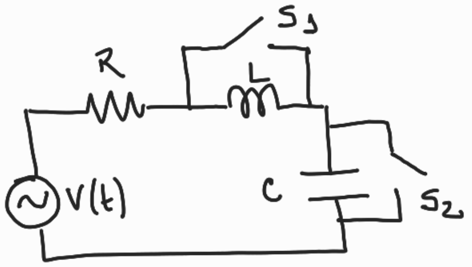
$$= \frac{\cancel{\pi} r_0^{\cancel{2}} B_m}{2\cancel{\pi}\,\cancel{r_0}\; 2t_0}\,\hat{e}_\theta = \boxed{\frac{B_m r_0}{4t_0}\,\hat{e}_\theta} , \quad 2t_0<t<4t_0$$



$$= \boxed{0} , \quad t>4t_0$$

— x —

②

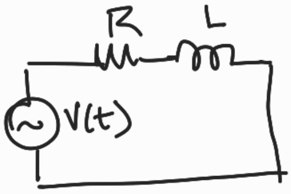


$V(t)=V_0\cos(\omega t) \rightarrow \tilde{V}(t)=V_0 e^{j\omega t}$

circuito en regimen estacionario en todas las situaciones planteadas

a y b)

$\boxed{\text{Situación (1)}}$: S_1 abierto, $\underline{S_2 \text{ cerrado}}$ $\rightarrow$ $V_C=0$



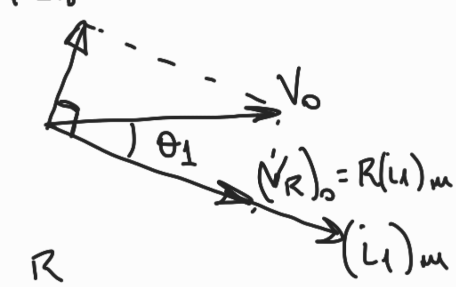
circuito RL serie con C.A.

$$\tilde{Z}_1 = R + j\omega L \rightarrow \boxed{|\tilde{Z}_1| = \sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

$$\tilde{Z}_1 = |\tilde{Z}_1| e^{j\theta_1} \rightarrow \operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\omega L}{R} \rightarrow \boxed{\theta_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right)} > 0$$

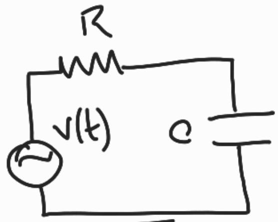
$$\tilde{V} - \tilde{Z}_1 \tilde{I}_1 = 0 \rightarrow \tilde{I}_1 = \frac{\tilde{V}}{\tilde{Z}_1} = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{|\tilde{Z}_1| e^{j\theta_1}} = \frac{V_0}{|\tilde{Z}_1|} e^{j(\omega t - \theta_1)}$$

$$\boxed{i_1(t) = \operatorname{Re}(\tilde{I}_1) = \underbrace{\frac{V_0}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}}_{(i_1)_m} \cos(\omega t - \theta_1)}$$



circuito predominantemente inductivo ($\theta_1>0$)
i_1 atrasa con respecto al voltaje de la fuente

$\boxed{\text{Situación (2)}}$: $\underline{S_1 \text{ cerrado}}$, S_2 abierto $\rightarrow$ $V_L=0$



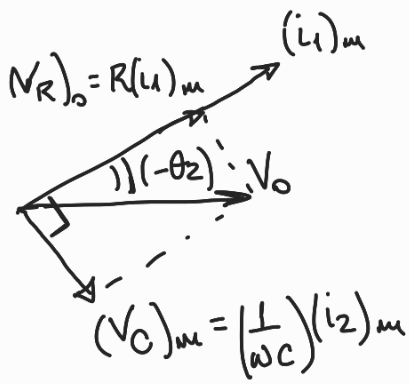
circuito RC serie con C.A.

$$\tilde{Z}_2 = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\left(\frac{1}{\omega C}\right) \rightarrow |\tilde{Z}_2| = \sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\tilde{Z}_2 = |\tilde{Z}_2| e^{j\theta_2} \rightarrow \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{-1}{\omega C R} \rightarrow \boxed{\theta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\omega R C}\right)} < 0$$

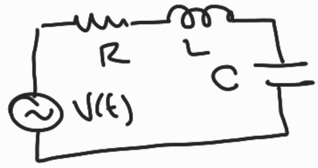
$$\tilde{V} - \tilde{Z}_2 \tilde{I}_2 = 0 \rightarrow \tilde{I}_2 = \frac{\tilde{V}}{\tilde{Z}_2} = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{|\tilde{Z}_2| e^{j\theta_2}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j(\omega t - \theta_2)}$$

$$\boxed{i_2(t) = \operatorname{Re}(\tilde{I}_2) = \underbrace{\frac{V_0}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}}_{(i_2)_m} \cos(\omega t \underbrace{-\theta_2}_{>0})}$$



circuito predominantemente capacitivo ($\theta_2<0$)
i_2 se adelanta con respecto al voltaje de la fuente

$\boxed{\text{Situación (3)}}$: S_1 y S_2 abiertos



RLC serie con C.A.

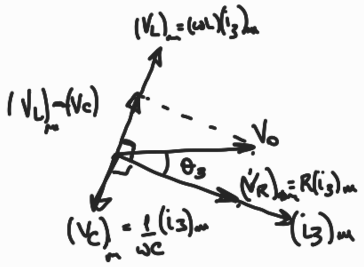
$$\tilde{Z}_3 = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \rightarrow |\tilde{Z}_3| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\tilde{Z}_3 = |\tilde{Z}_3| e^{j\theta_3} \rightarrow \operatorname{tg}\theta_3 = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \rightarrow \boxed{\theta_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)}$$

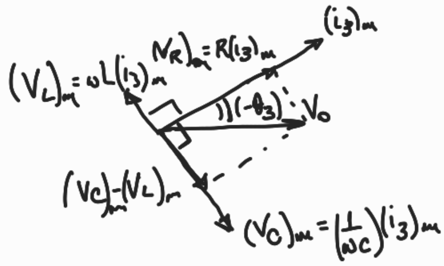
El signo de θ_3 depende del signo de $X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$

$$\tilde{V} = \tilde{Z}_3 \tilde{I}_3 \rightarrow \tilde{I}_3 = \frac{\tilde{V}}{\tilde{Z}_3} = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{|\tilde{Z}_3| e^{j\theta_3}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} e^{j(\omega t - \theta_3)}$$

$$\boxed{i_3(t) = \underbrace{\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}_{=(i_3)_m} \cos(\omega t - \theta_3)}$$



si $\theta_3 > 0$ ($\omega L > \frac{1}{\omega C}$), circ. predom. inductivo y la corriente atrasa respecto al voltaje de la fuente



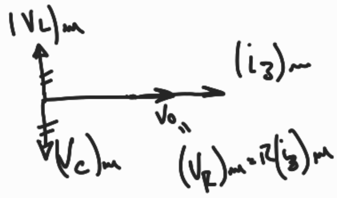
si $\theta_3 < 0$ ($\omega L < \frac{1}{\omega C}$), circ. predom. capacitivo y la corriente se adelanta respecto al voltaje de la fuente

Si $\theta_3 = 0$ ($\omega L = \frac{1}{\omega C}$) es el caso de la parte c)

c) $(i_3)_m = \dfrac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$ ← amplitud de la corriente entregada por la fuente

$(i_3)_m$ es maxima para el minimo valor de su denominador $|\tilde{Z}_3| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$
y eso ocurre cuando $\omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}} = \omega_0$
$(\theta_3 = 0)$

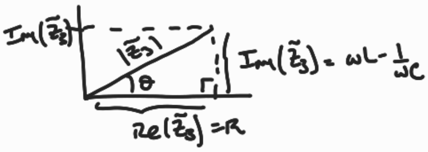
La corriente y el voltaje de la fuente están en fase, $(V_L)_m = (V_C)_m$ y $(V_R)_m = V_0$



Potencia media entregada por la fuente:

$$\boxed{\langle P(t)\rangle\Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{2} V_0 \underbrace{(i_3)_m}_{=\frac{V_0}{R}} \underbrace{\cos\theta_3}_{=1 \text{ para } \omega_0} = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R}}$$

d) $\boxed{FP = \cos\theta_3(\omega)} = \dfrac{R}{|\tilde{Z}_3(\omega)|} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \underset{\omega = \frac{2}{\sqrt{LC}}}{=} \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + \left[\frac{2L}{\sqrt{LC}} - \frac{1\sqrt{LC}}{2C}\right]^2}} = \boxed{\dfrac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{9}{4}\frac{L}{C}}}}$



— x —

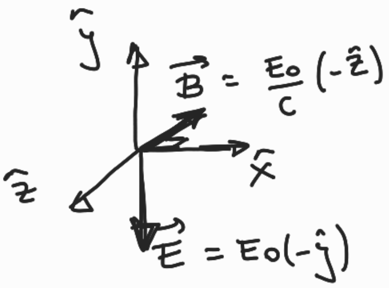
③ Una onda electromagnética se propaga en el vacío con velocidad c

a) $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \rightarrow \boxed{f = \frac{c}{\lambda}}$, $\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda}}$, $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$ $\left(c = \frac{\omega}{k}\right)$

frecuencia — frec. ang. — nro. de onda

b)

$\vec{E}$ y $\vec{B}$ en fase $\Rightarrow$ si $\vec{E}$ es máx, $\vec{B}$ es máximo también. Además el producto vectorial de $\vec{E}$ con $\vec{B}$ está en la dirección de propagación de la onda $\hat{x}$ (=direc. del vector de Poynting : $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$). Como en el instante dado $\vec{E}$ está según $(-\hat{j})$, $\vec{B}$ debe estar según $(-\hat{z})$ y sus módulos se relacionan a través de $|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c} = \frac{E_0}{c}$.



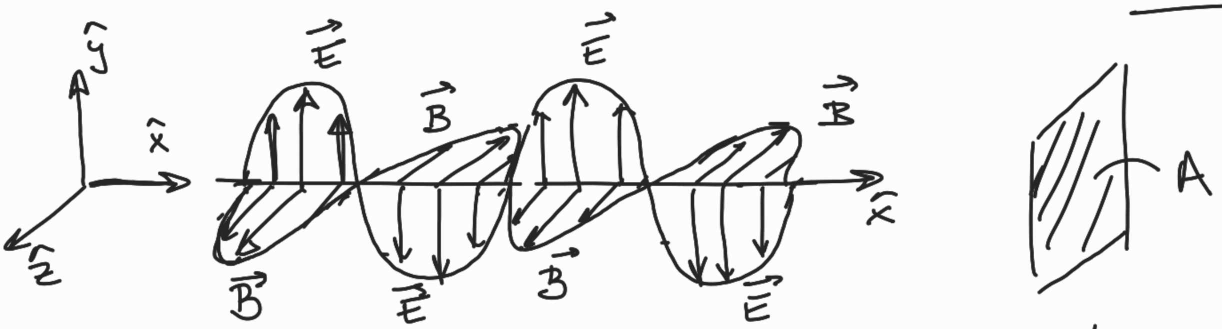
en el instante considerado

c) $\vec{S}(x,t) = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(x,t) \times \vec{B}(x,t)$

$\vec{E}(x,t) = E_0 \operatorname{sen}(kx-\omega t)\,\hat{j} \Rightarrow \vec{B}(x,t) = \underbrace{B_0}_{=\frac{E_0}{c}} \operatorname{sen}(kx-\omega t)\,\hat{z}$, $(\hat{j}\times\hat{z} = \hat{x})$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{S}(x,t) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\operatorname{sen}^2(kx-\omega t)\,\hat{x}}$$

intensidad de radiación I es el valor medio en el tiempo del módulo del vector de Poynting : $\boxed{I = \langle|\vec{S}|\rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu_0 c}}$



d) potencia total promedio absorbida por la lámina :

flujo de $\vec{S}$ a través de A

$$\langle P\rangle = \left\langle\frac{dU}{dt}\right\rangle = \left\langle\int_A \vec{S}\cdot\underbrace{\hat{n}}_{=\hat{x}}\,da\right\rangle = \langle|\vec{S}|A\rangle = \langle|\vec{S}|\rangle A = I A$$

$$\boxed{\langle P\rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{\mu_0 c}A}$$

— ∝ —