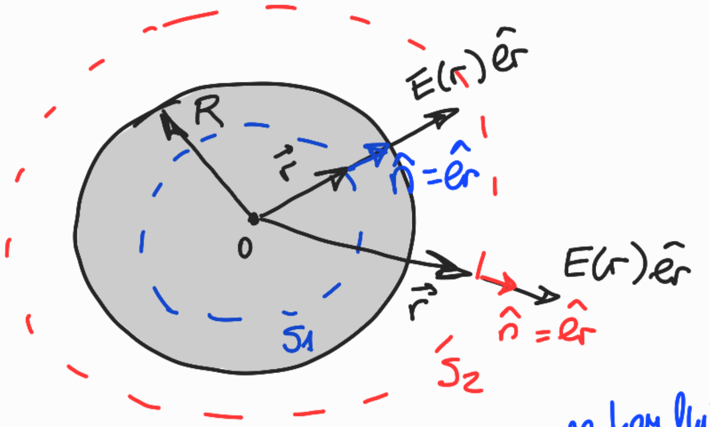
PRIMER PARCIAL - FÍSICA 3 (SEM. 2) - 21/09/2024.-

① a) La distribución de carga tiene simetría de revolución en torno al eje del cilindro que pasa por O ⇒ el campo eléctrico tanto dentro como fuera del cilindro será de la forma $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\hat{e}_r$, siendo r la distancia al eje y $\hat{e}_r$ el versor correspondiente en coordenadas cilíndricas.

La simetría involucrada nos permite usar la ley de Gauss para determinar el campo tanto dentro como fuera.



Consideremos las siguientes superficies gaussianas y apliquemos la ley de Gauss en c/región ($r<R$ y $r>R$)

S_1: superficie cilíndrica de radio r ($r<R$) y largo L

S_2: superficie cilíndrica de radio r ($r>R$) y largo L

↳ región $r<R$

no hay flujo de $\vec{E}$ a través de las tapas del cilindro

$$\oint_{S_1} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \frac{\rho_0(\pi r^2 L)}{\varepsilon_0} \longrightarrow \int_{\substack{\text{cara}\\\text{lateral de}\\ S_1}} \overset{\vec{E}(r)}{E(r)\,\hat{e}_r}\cdot\overset{\hat{n}}{\hat{e}_r}\,dA = E(r)\int_{\substack{\text{cara}\\\text{lateral de}\\ S_1}} dA = \frac{\rho_0(\pi r^2 L)}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r)\,(2\cancel{\pi}\cancel{r}\cancel{L}) = \frac{\rho_0(\cancel{\pi}\, r^{\cancel{2}}\cancel{L})}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho_0\, r}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho_0\,\vec{r}}{2\varepsilon_0}}\ ;\ r<R$$

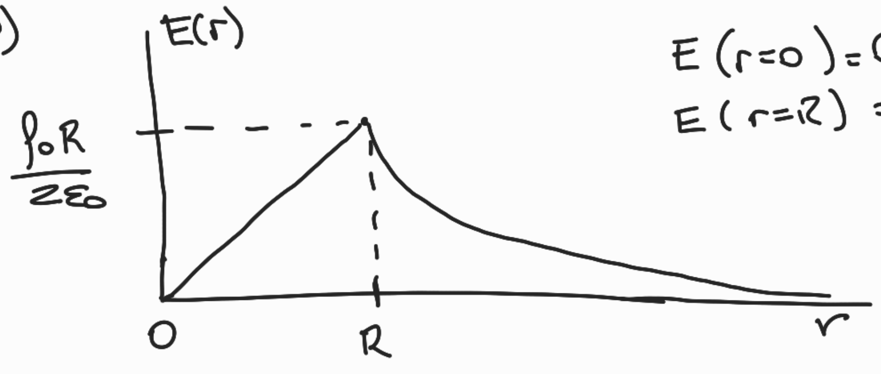
↳ región $r>R$

no hay flujo de $\vec{E}$ a través de las tapas del cilindro

$$\oint_{S_2} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = \frac{\rho_0(\pi R^2 L)}{\varepsilon_0} \longrightarrow \int_{\substack{\text{cara lateral}\\ \text{de } S_2}} \overset{\vec{E}(r)}{E(r)\,\hat{e}_r}\cdot\overset{\hat{n}}{\hat{e}_r}\,dA = E(r)\,(2\cancel{\pi} r\cancel{L}) = \frac{\rho_0(\cancel{\pi} R^2\cancel{L})}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r}\,\hat{e}_r}\ ;\ r>R$$

b)



$E(r=0) = 0$

$E(r=R) = \frac{\rho_0 R}{2\varepsilon_0}$

c) y para $r<R$

E(r) para r<R

$$V(r) - \underbrace{V(R)}_{0} = -\int_R^r \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_R^r \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}\, dr = -\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r^2\Big|_R^r = -\frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\left(r^2-R^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\left(R^2-r^2\right)} \quad ; r\leq R$$

y para $r>R$

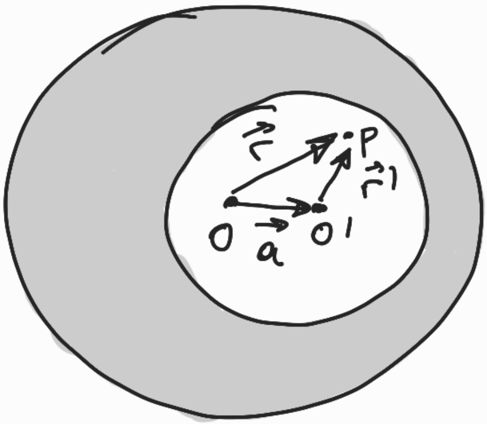
E(r) para r>R

$$V(r) - V(R) = -\int_R^r \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\int_R^r \frac{dr}{r} = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{R}\right)} \quad ; r\geq R$$

Obs: se verifica la continuidad del potencial en $r=R$, donde además toma el valor cero.

d)



El campo total en el punto P será la suma vectorial del campo eléctrico debido al cilindro homogéneo de carga volumétrica ρ_0 y del campo eléctrico debido a un cilindro homogéneo de carga volumétrica $-\rho_0$ en el lugar de la cavidad.

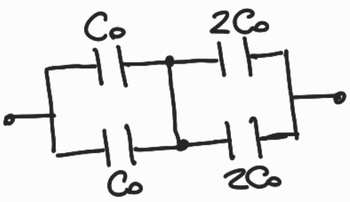
$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_0 \vec{r}}{2\varepsilon_0}\ , \quad \vec{E}_2 = -\frac{\rho_0 \vec{r}\,'}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_P = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right) = \frac{\rho_0 \vec{a}}{2\varepsilon_0}}$$

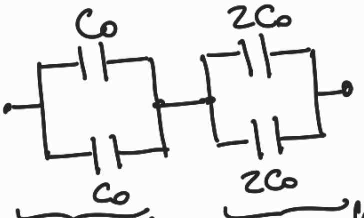
$$\left(\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}\,' \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}\,' = \vec{a}\right)$$

El campo en todo punto de la cavidad es uniforme y en la dirección de $\vec{a}$.

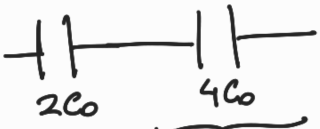
2 a)



≈



en paralelo $C_0+C_0=2C_0$ — en paralelo $2C_0+2C_0=4C_0$



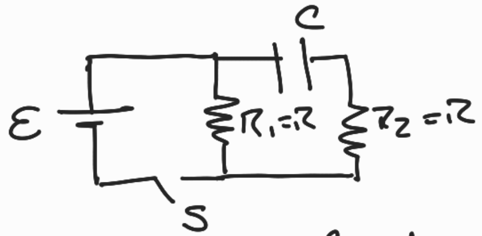
≈

en serie

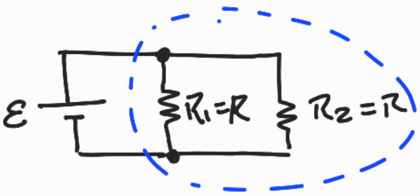
$$\frac{1}{C}=\frac{1}{2C_0}+\frac{1}{4C_0}=\frac{1}{2C_0}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4C_0} \Rightarrow \boxed{C=\frac{4}{3}C_0}$$

— x —

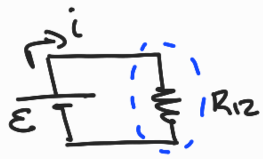
b)



b.i) capacitor inicialmente descargado, inmediatamente después de cerrar la llave la diferencia de potencial a través del capacitor es cero (actúa como cortocircuito, es como un cable ideal)



≈

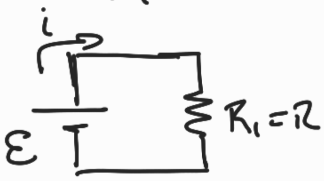


R_1 y R_2 en paralelo

$$\frac{1}{R_{12}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R}=\frac{2}{R} \Rightarrow R_{12}=\frac{R}{2}$$

$$\varepsilon-R_{12}\,i=0 \rightarrow \boxed{i=\frac{\varepsilon}{R_{12}}=\frac{2\varepsilon}{R}}$$

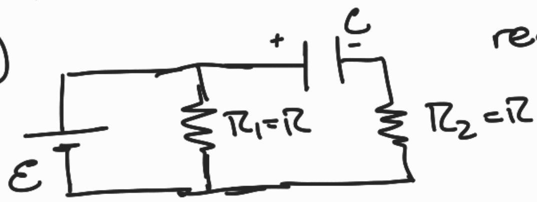
b.ii) luego de un tiempo muy largo, el capacitor se encuentra completamente cargado y deja de circular corriente por la rama donde está (actúa como circuito abierto)



$$\varepsilon-Ri=0 \rightarrow \boxed{i=\frac{\varepsilon}{R}}$$

no hay corriente por la rama del capacitor

b.iii)



recorro la malla grande a sentido horario:

$$\varepsilon-V_c-R_2 i_c=0 \Rightarrow V_c=\varepsilon-R_2 \underbrace{i_c}_{\to 0}=\varepsilon$$

$$\Rightarrow \underline{V_c=\varepsilon}$$

$$\boxed{U=\frac{1}{2}CV_c^2=\frac{1}{2}C\varepsilon^2}$$

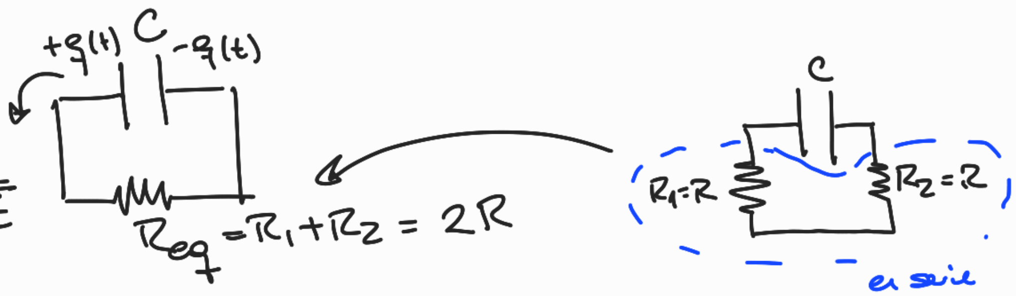
c) se abre la llave luego de mucho tiempo de estar cerrada.
El capacitor estaba cargado completamente y su carga al momento de abrir la llave está determinada por la situación en b.iii): $V_C = \frac{q_{max}}{C} = \mathcal{E}$

Sea $t=0$ el instante en que se abre la llave

$\Rightarrow q(0) = q_{máx} = C\mathcal{E}$

Al abrir la llave, el capacitor comienza a descargarse

$i = -\frac{dq}{dt}$



$R_{eq} = R_1 + R_2 = 2R$

c.i)

$$-2Ri + \frac{q}{C} = 0 \quad \text{(recorro la malla en el sentido de i)}$$

$$-2R\left(-\frac{dq}{dt}\right) + \frac{q}{C} = 0 \rightarrow 2R\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C}$$

$$\int_{q(0)}^{q(t)} \frac{dq}{q} = -\int_{t=0}^{t} \frac{dt}{2RC} \rightarrow \ln\left[\frac{q(t)}{q(0)}\right] = -\frac{1}{2RC}t$$

$$\boxed{q(t) = q(0)\, e^{-\frac{1}{2RC}t}} = \boxed{C\mathcal{E} e^{-\frac{t}{2RC}}}$$

c.ii) R_1 y R_2 en serie, la corriente por R_1 es la misma que por $R_{eq} = 2R$

$$\boxed{i(t) = -\frac{dq}{dt} = + \cancel{C}\mathcal{E}\left(+\frac{1}{2R\cancel{C}}\right)e^{-\frac{t}{2RC}}} = \boxed{\underbrace{\frac{\mathcal{E}}{2R}}_{i(0)} e^{-\frac{t}{2RC}}}$$

c.iii) el tiempo de relajación corresponde a aquel para el que la carga decae en $\frac{1}{e}$ de su valor inicial:

$$q(\tau_c) = q(0)e^{-1} \Rightarrow e^{-\frac{\tau_c}{2RC}} = e^{-1} \Rightarrow \boxed{\tau_c = 2RC}$$