Solución primer parcial Física 3
Abril 2019

Ejericio 1:

a) Por simetría, el campo eléctrico debe tener dirección radial. Debido a que $Q > 0$, el sentido del vector $\vec{E}$ es saliente.

Tomando como superficie gaussiana una esfera (S) de radio r $(a < r < b)$, concéntrica a la esfera maciza, y utilizando la Ley de Gauss, tenemos que,

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} ds = \frac{Q}{K\varepsilon_0}$$

En todos los puntos de la superficie gaussiana:

i) El campo eléctrico es paralelo a la normal saliente: $\vec{E} \cdot \hat{n} = \left|\vec{E}\right|$

ii) Su módulo es constante: $\oint_S \left|\vec{E}\right| ds = \left|\vec{E}\right| \oint_S ds$

Entonces,$\left|\vec{E}\right| 4\pi r^2 = \frac{Q}{K\varepsilon_0}$

Y finalmente,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi K\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \tag{1}$$

b) Tomando como superficie gaussiana una esfera (S) de radio r $(r > b)$, concéntrica a la esfera maciza, y considerando argumentos análogos a la parte (a), tenemos,

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} ds = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

c) Podemos calcular el potencial en $r = a$ integrando el campo desde el infinito:

$$V(a) - V(\infty) = -\int_\infty^a \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = -\int_\infty^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \cdot d\vec{r} - \int_b^a \frac{Q}{4\pi K\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \cdot d\vec{r}$$

$$V(a) = \left.\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right|_\infty^b + \left.\frac{Q}{4\pi K\varepsilon_0 r}\right|_b^a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{Ka} - \frac{1}{Kb}\right)$$

$$V(a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(K-1)a + b}{Kab}\right)$$

Y la capacitancia es

$$C = \frac{Q}{|V|} = \frac{4\pi\varepsilon_0 Kab}{(K-1)a + b}$$

d) La energía eléctrica es:

$$U = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(K-1)a + b}{Kab}\right)$$

Ejercicio 2

a)Como el interruptor S ha estado cerrado durante mucho tiempo, el condensador ya está completamente cargado y se comporta como un abierto. La corriente i solo pasará por las resistencias como se ve en la figura 3 Utilizando la ley de mallas en el sentido de la corriente i, obtendremos:

$$\xi - R_1 i - R_2 i = 0 \Rightarrow i = \frac{\xi}{R_1 + R_2} = 50\mu A$$

Como el condensador y el resistor están en paralelo, tienen la misma diferencia de potencial (V_c). Entonces:

$$V_c = R_2 i = 50V$$

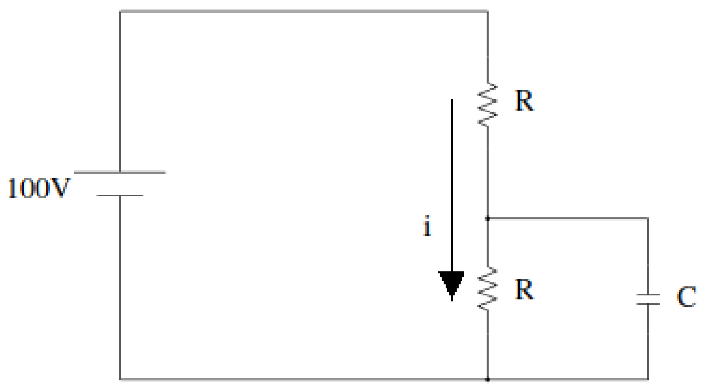

Figura 1: Camino que recorre la corriente en el circuito de la parte a

b) Cuando abrimos el interruptor S el único circuito cerrado (por donde pasa la corriente) del sistema lo conforman el condensador y la resistencia R_2 (figura 2). Como ambos componentes están en paralelo, tendremos:

$$R_2 i = \frac{Q}{C} \tag{2}$$

Donde Q es la carga que está en la placa positiva del condensador. Ya que la corriente del circuito viene del movimiento de las cargas almacenadas en el condensador, tendremos:

$$i = -\frac{dQ}{dt}$$

Si sustituimos esto en la ecuación 2 obtendremos una ecuación diferencial para $Q(t)$. Tomaremos la condición inicial de la carga justo cuando se abre el interruptor, por tanto $Q(t = 0) = CV_c$, usando el valor de la parte a. Resolviendo:

$$\frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} = 0; Q(t = 0) = CV_c \Rightarrow Q(t) = CV_c e^{-\frac{t}{RC}} \tag{3}$$

Finalmente, usamos que $\frac{Q(t)}{C} = V(t)$ para obtener la expresión que buscábamos:

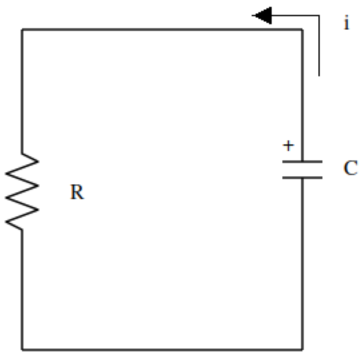

Figura 2: Camino que recorre la corriente en el circuito de la parte b

$$V(t) = V_c e^{-\frac{t}{RC}}$$

Que es la diferencia de potencial del condensador con respecto al tiempo para todo $t \geqslant 0$.

c) Si $Q(t_{1/2}) = Q(t = 0)/2$, usemos la ecuación 3 calcular $t_{1/2}$, obtendremos:

$$Q(t = t_{1/2}) = \frac{Q(t = 0}{2} = Q(t = 0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

De donde despejamos el $t_1/2$, tal que:

$$t_{1/2} = RC \ln 2 \approx 693{,}15s \tag{4}$$

d) Según la ecuación 3, luego de mucho tiempo toda la energía se disipa por efecto Joule. Entonces, la cantidad de energía que se disipó es toda la energía inicial almacenada en el condensador, ésta es:

$$U = \frac{Q^2(t = 0)}{2C} = 1{,}25J$$

Ejercicio 3

a) *Esta sección corresponde al ejercicio 6 del práctico 3*

Para calcular el potencial integro en la distribución de carga $dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$. En esta fórmula está implícito que el potencial es cero en el infinito.

$$V(x) = \int_x^{x+L} \frac{\lambda dx'}{4\pi\epsilon_0 x'} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{x + L}{x}\right)$$

Para calcular el campo eléctrico uso la ley de Coulomb:

$$\vec{E}(x) = \int_x^{x+L} \frac{\lambda dx'}{4\pi\epsilon_0 {x'}^2} \hat{x}$$

$$\vec{E}(x) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + L}\right) \hat{x}$$

El problema tiene simetría de rotación en torno a la barra, el campo eléctrico debe ser según la dirección $\hat{x}$, y por lo tanto también se podría calcular derivando el potencial: $\vec{E}(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}$

b) Para calcular el potencial integro en la distribución de carga. Por la simetría del problema todos los puntos de la circunferencia están a distancia a de P.

$$V(P) = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} a d\theta$$

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0}$$

El campo debe ser 0 por la simetría del problema.

c)

El potencial debido a 1/4 de circunferencia es 1/4 del potencial debido a la circunferencia completa. Usando el resultado de la parte anterior:

$$V(P) = \frac{\lambda}{8\epsilon_0}$$

Para calcular el campo uso la ley de Coulomb.

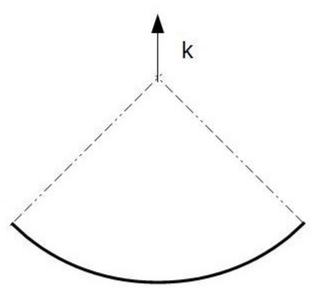

Figura 3: Simetría en para el arco de circunferencia

Por la simetría del problema, el campo sólo puede tener componente en la dirección del eje de simetría del arco $\hat{k}$. Integro sólo la componente en esa dirección.

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a^2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(\theta) a d\theta$$

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{a} \hat{k}$$

d) Basta usar superposición y los resultados anteriores.

Tengo dos barras de largo $L = a/2$ evaluadas en $x = a$ y cuatro cuartos de circunferencia, tres de radio a y uno de radio a/2. También se puede ver como una circunferencia completa, menos un cuarto, más el cuarto más pequeño.

El potencial es la suma de los potenciales:

$$V(P) = \left(2\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\log(\frac{a/2 + a/2}{a/2}) + 4\frac{\lambda}{8\epsilon_0}\right)$$

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0}\left(\frac{\log(2)}{\pi} + 1\right)$$

Para el campo se debe recordar que es una suma de vectores.

$$\vec{E}(P) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\hat{y} - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}\hat{x} - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{2}{a}(\hat{x} + \hat{y}) + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a}(\hat{x} + \hat{y})$$

$$\vec{E}(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a}(\hat{x} + \hat{y})$$