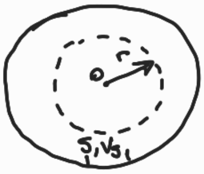
Solución Examen Física 3   20 de diciembre 2024

1) a) Considero como superficie gaussiana una superficie esférica de radio r<a



Ley de Gauss:

$$\oint_{S_1} \underbrace{\vec{E}}_{E(r)\hat{e}_r}\cdot\underbrace{\hat{n}}_{\hat{e}_r}\, dA = \frac{q_s}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r)\,(4\pi r^2) = \frac{q_{S_1}}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

← carga neta encerrada por la superficie S_1

$$* \; q_{S_1} = \int_{V_{S_1}} \rho(r)\,dV = \int_0^r \underbrace{\rho(r)}_{\beta r}(4\pi r^2)\,dr = \beta 4\pi \int_0^r r^3 dr = \beta \cancel{4}\pi \frac{r^4}{\cancel{4}} = \beta\pi r^4$$

sustituyendo $E(r) = E_0\left(\frac{r}{a}\right)^2$ y $q_s = \beta\pi r^4$ en (1):

$$E_0 \frac{r^2}{a^2}(4\pi r^2) = \frac{\beta\pi r^4}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{\beta = \frac{4\varepsilon_0 E_0}{a^2}} \rightarrow \boxed{\rho(r) = \left(\frac{4\varepsilon_0 E_0}{a^2}\right) r}$$

b) Ley de Gauss con sup. gaussiana esférica de radio r>a
(Por la simetría de la distribución de carga el campo es radial)

$$\oint_{S_2} \vec{E}\cdot\hat{n}\, dA = \frac{q_{S_2}}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r)(\cancel{4\pi} r^2) = \frac{\beta\cancel{\pi} a^4}{\varepsilon_0}$$

← $q_s = \beta\pi r^4$ en este caso r=a

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\beta a^4}{4\varepsilon_0 r^2} = E_0\left(\frac{a}{r}\right)^2 \rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = E_0\left(\frac{a}{r}\right)^2 \hat{e}_r}, \quad r>a$$

c) Cálculo de V(r) a partir del campo: $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$

* potencial en un punto fuera de la esfera: r>a

$$V(r) - \underbrace{V(\infty)}_{0} = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \underbrace{E(r')}_{E_0 a^2/r'^2}dr' = E_0 a^2 \int_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} = E_0 a^2\left(-\frac{1}{r'}\right)\Big|_r^\infty = \frac{E_0 a^2}{r} \rightarrow \boxed{V(r) = \frac{E_0 a^2}{r}} \quad r>a$$

* potencial en un punto dentro de la esfera: r<a

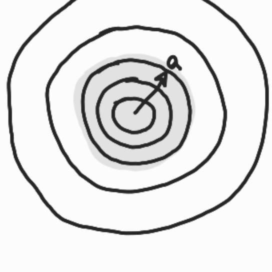
$$V(r) - \underbrace{V(\infty)}_{0} = -\int_\infty^a \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_a^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^\infty \underbrace{E(r')}_{E_0 a^2/r'^2}dr' + \int_r^a \underbrace{E(r')}_{E_0 r'^2/a^2}dr' = E_0 a^2 \underbrace{\int_a^\infty \frac{dr'}{r'^2}}_{-\frac{1}{r'}\big|_a^\infty} + \frac{E_0}{a^2}\underbrace{\int_r^a r'^2 dr'}_{\frac{r'^3}{3}\big|_r^a}$$

$$\boxed{V(r) = E_0 a + \frac{E_0}{a^2}\left[\frac{a^3}{3} - \frac{r^3}{3}\right]} = E_0 a + \frac{E_0 a}{3} - \frac{E_0 r^3}{3a^2} = \boxed{\frac{4}{3}E_0 a - \frac{E_0 r^3}{3a^2}} \quad r<a$$

Obs: en r=a ambos potenciales coinciden $V(r=a) = E_0 a$ y afuera el potencial es de la forma del potencial de una carga puntual q_{tot} situada en el origen: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{tot}}{r} = \frac{\beta\pi a^4}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\cancel{4\varepsilon_0} E_0 \cancel{\pi} a^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}\, r} = \frac{E_0 a^2}{r}$ ✓

* Superficies equipotenciales:

La distribución de carga con simetría esférica implica que cualquier superficie esférica centrada en el origen va a tener el mismo valor de potencial en todos los puntos de su superficie. El campo eléctrico es perpendicular a estas superficies en c/punto.



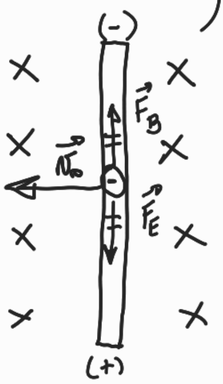
d) $W_{BC} = -q_0(V_C - V_B) = 0$ ← $V_B = V_C$ (están al mismo potencial)

$$W_{AB} = -q_0(V_B - V_A) = -q_0 E_0 a^2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0+d}\right) = -\frac{q_0 d E_0 a^2}{r_0(r_0+d)}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{AC}} = W_{AB} + W_{BC} = W_{AB} = \boxed{-\frac{q_0 d E_0 a^2}{r_0(r_0+d)}}$$

(2)

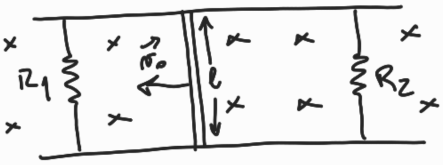
a) Los electrones (portadores de carga) experimentarán una fuerza magnética ($\vec{F}_B = q\vec{v}_0 \times \vec{B}$) de módulo $e v_0 B$ y sentido hacia el extremo superior de la barra. En consecuencia, el extremo superior habrá un exceso de carga negativa (−) y en el extremo inferior habrá un exceso de carga positiva (+). Esto da lugar a un campo eléctrico dentro de la barra, con sentido desde el extremo (+) hacia el extremo (−). Ese campo va aumentando a medida que se sigue acumulando carga en los extremos de la barra, hasta que la fuerza eléctrica sobre los electrones equilibran a la fuerza magnética;



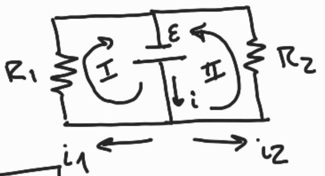
$$qE = q v_0 B \longrightarrow \underset{V/l}{E} = v_0 B \longrightarrow \boxed{\underset{(V_{(+)}-V_{(-)})}{V} = E l = v_0 B l}$$

diferencia de potencial entre los extremos de la barra (fem por movimiento)

b) Cuando la barra conductora en movimiento es parte de una trayectoria cerrada, las cargas son libres de moverse en esa trayectoria, estableciéndose una corriente i (sentido de movimiento de las cargas positivas).



$\longleftrightarrow$



mallas:

(I) $\varepsilon - R_1 i_1 = 0$

(II) $\varepsilon - R_2 i_2 = 0$

nodos:

$i = i_1 + i_2$ (III)

De (a) $\varepsilon = B l v_0$ $\Rightarrow$ de (I): $\boxed{i_1 = \frac{\varepsilon}{R_1} = \frac{B l v_0}{R_1}}$

$\Rightarrow$ de (II): $\boxed{i_2 = \frac{\varepsilon}{R_2} = \frac{B l v_0}{R_2}}$

De (III): $\boxed{i = i_1 + i_2 = B l v_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$

* Alternativamente

$\Phi_B = B l x \rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = B l \frac{dx}{dt} = B l v_0$

$|\varepsilon| = B l v_0$

c) $\boxed{P_{R_1} = V_{R_1} i_1 = R_1 i_1^2 = \frac{\cancel{R_1} (B l v_0)^2}{R_1^{\cancel{2}}} = \frac{(B l v_0)^2}{R_1}}$

$\boxed{P_{R_2} = V_{R_2} i_2 = R_2 i_2^2 = \frac{\cancel{R_2} (B l v_0)^2}{R_2^{\cancel{2}}} = \frac{(B l v_0)^2}{R_2}}$

$\boxed{P_\varepsilon = \varepsilon i = B l v_0 \left[B l v_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right] = (B l v_0)^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} = P_{R_1} + P_{R_2}$

Obs: $\boxed{P_\varepsilon = \varepsilon i = \varepsilon (i_1 + i_2) = \underbrace{\varepsilon i_1}_{(I)\ R_1 i_1^2} + \underbrace{\varepsilon i_2}_{(II)\ R_2 i_2^2} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 = P_{R_1} + P_{R_2}}$ ✓

d) $\sum \vec{F}_{barra} = m\vec{a} = 0 \leftarrow \vec{v} = cte \rightarrow \vec{F}_{ext} + \vec{F}_B = 0 \Rightarrow |\vec{F}_{ext}| = |\vec{F}_B|$

(2ª ley Newton)

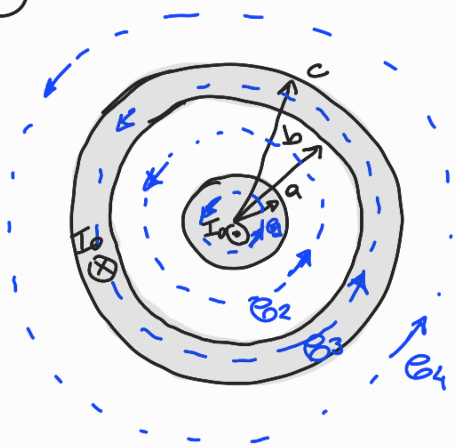
barra que lleva corriente i en presencia de un campo $\vec{B}$: $\vec{F}_B = i \vec{l} \times \vec{B}$

$\Rightarrow |\vec{F}_B| = i l B = \left[B l v_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right] l B = B^2 l^2 v_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{|\vec{F}_{ext}| = B^2 l^2 v_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$

— x —

3



a) Considero circunferencias de radio r y las recorro en sentido antihorario

$\pi a^2 - I_0$
$\pi r^2 - i_{\mathcal{C}_1} = ?$

• $0<r<a$

Ampère: $\oint_{\mathcal{C}_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\mathcal{C}_1} = \mu_0 I_0 \left(\frac{r}{a}\right)^2$

$\Rightarrow B(r)(2\pi r) = \mu_0 I_0 \frac{r^2}{a^2} \Rightarrow \boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi a^2}}$ sentido antih. (fig. a $\mathcal{C}_1$)

Análogamente:

• $a<r<b$ $\oint_{\mathcal{C}_2} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\mathcal{C}_2} \Rightarrow B(r)(2\pi r) = \mu_0 I_0 \Rightarrow \boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}}$ sentido antih. (fig. a $\mathcal{C}_2$)

$\pi(c^2-b^2) - I_0$
$\pi(r^2-b^2) - i_{\mathcal{C}_3} = ?$

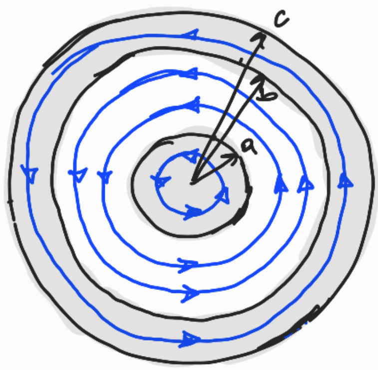
• $b<r<c$ $\oint_{\mathcal{C}_3} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\mathcal{C}_3} \Rightarrow B(r)(2\pi r) = \mu_0\left[I_0 - I_0 \frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right] = \mu_0 I_0 \left(\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\right) \Rightarrow \boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\left(\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}\right)}$

sentido antih (fig a $\mathcal{C}_3$)

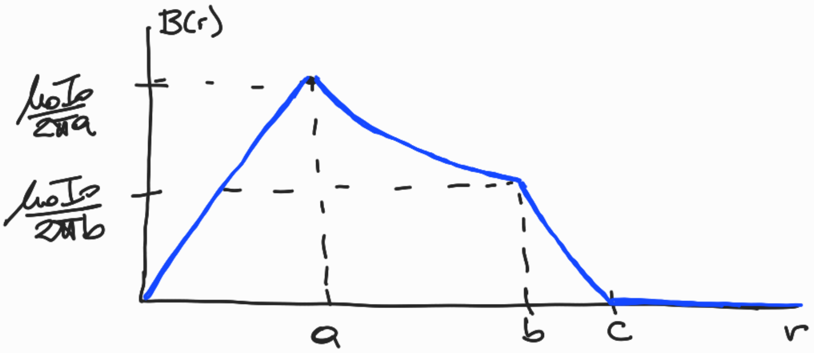
• $r>c$ $\oint_{\mathcal{C}_4} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\mathcal{C}_4} \Rightarrow B(r)(2\pi r) = \mu_0[I_0 - I_0] = 0 \Rightarrow \boxed{B(r) = 0}$

b) Las líneas de campo magnético son circunferencias centradas en el eje del coaxial.

Fuera del coaxial ($r>c$) no hay campo.



c)



d) $a<r<b$

$$\boxed{u_B(r) = \frac{B^2(r)}{2\mu_0}} = \frac{1}{2\mu_0}\frac{\mu_0^2 I_0^2}{(2\pi)^2 r^2} = \boxed{\frac{\mu_0 I_0^2}{8\pi^2 r^2}}$$

—x—