1. Problema 1

parte a)

Utilizando el principio de superposición obtenemos que el potencial total será el generado por la semicircunferencia más el creado por la carga puntual.
El potencial producido por la semicircunferencia se puede calcular considerando que el potencial producido por un diferencial de arco viene dado por la expresión:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R d\theta}{R} \tag{1}$$

En esta última expresión hemos considerado que la carga de un diferencial de arco viene determinada por $dq = \lambda dl = \lambda R d\theta$.

Por lo tanto, integrando esta expresión en la semicircunferencia obtenemos que:

$$V_{semi-cfa} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi} d\theta = \frac{\lambda}{4\epsilon_0} \tag{2}$$

Adicionalmente, el potencial que genera una carga puntual está dado por la expresión:

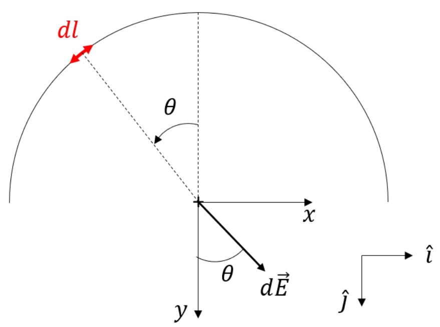
$$V_{carga} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \tag{3}$$

Por lo tanto el potencial del sistema total es igual a:

$$V(C) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{\lambda}{4\epsilon_0} \tag{4}$$

parte b)

Como se indica en el diagrama siguiente las componentes horizontales del campo eléctrico se anulan por simetría en el punto C. Por lo tanto, en ese punto sólo existe la superposición de las componentes verticales generadas por cada dl. Esto quiere decir que el campo total generado por la semicircunferencia viene dado por la expresión:



$$E_{semi-cfa} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\lambda R\cos\theta d\theta}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{R}\operatorname{sen}\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \tag{5}$$

Obtenemos entonces que el campo total de la semicircunferencia es:

$$\vec{E}_{semi-cfa.} = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\hat{j} \tag{6}$$

Por otro lado el campo eléctrico generado por la carga está dado por la expresión:

$$\vec{E}_{carga}(C) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}(-\hat{j}) \tag{7}$$

Por lo tanto el campo total generado por el sitema en el punto C es:

$$\vec{E}(C) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{2\lambda}{R} - \frac{q}{R^2}\Big)\hat{j} \tag{8}$$

parte c)

Para que $\vec{E}(C) = 0$ se tiene que cumplir la relación:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow q = 2R\lambda \tag{9}$$

Problema 2

parte a)

El flujo magnético hacia arriba a través de la espira es

$$\Phi_B = B_z\pi a^2 = bh(t)\pi a^2 \tag{10}$$

Utilizando la ley de Faraday, se deduce que la f.e.m. inducida en la espira es:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = b\pi a^2 v(t) \tag{11}$$

parte b)

Usando la ley de mallas en la espira se obtiene:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{b\pi a^2}{R}v(t) \tag{12}$$

Como el flujo se orientó hacia arriba, de acuerdo con la regla de la mano de derecha la corriente circula en sentido antihorario.

parte c)

La fuerza producida por un campo magnético en una espira es:

$$\vec{F} = i\int_{\mathcal{C}} \vec{dl} \times \vec{B} \tag{13}$$

dónde $\mathcal{C}$ es una curva que recorre la espira en el sentido de la corriente.

Como $\vec{dl}$ recorre un arco de circunferencia se obtiene:

$$\vec{F} = i\hat{k}\int_0^{2\pi} d\theta a|B_r| = i\pi ba^2\hat{k} \tag{14}$$

Es decir, la fuerza es vertical y orientada hacia arriba.

parte d)

Aplicando la segunda ley de Newton a la espira se obtiene:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - i\pi ba^2 \tag{15}$$

Es decir,

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{b^2a^4\pi^2}{mR}v(t) \tag{16}$$

Si esperamos mucho tiempo, la velocidad alcanza un valor límite v_∞. Es decir $\frac{dv(t)}{dt}$ tiende a cero. En ese límite la velocidad se despeja fácilmente:

$$v_\infty = \frac{mRg}{(b\pi a^2)^2} \tag{17}$$

Ejercicio 3

parte a)

Del circuito se tiene:

$$V - j\omega LI - RI = 0$$

Entonces:

$$I = \frac{V}{j\omega L + R}$$

Calculamos el módulo y el argumento:

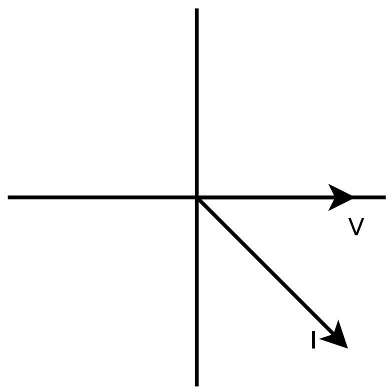
$$|I| = \frac{V_P}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}}$$

$$\arg(I) = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Entonces:

$$i(t) = \frac{V_P}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}}\cos\left[\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right]$$

parte b)



parte c)

Para cumplir lo solicitado el módulo de la corriente por el condensador tiene que ser el doble de la parte imaginaria de la corriente por el circuito RL, entonces

$$\omega C V_P = 2\frac{V_P}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}}\sin(\phi)$$

con:

$$\sin(\phi) = \frac{\omega L}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}}$$

Entonces

$$C = 2\frac{L}{(\omega L)^2 + R^2}$$

parte d)

La potencia media disipada en el circuito es la potencia media disipada en la resistencia, entonces:

$$P = \frac{1}{2}R\left|I\right|^2$$

Entonces:

$$P = \frac{1}{2}\frac{RV_P^2}{(\omega L)^2 + R^2}$$