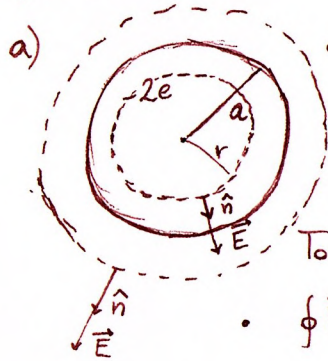


Ejercicio 1.



densidad de carga uniforme: $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{-2e}{\frac{4}{3}\pi a^3}$

simetría esférica $\rightarrow \vec{E} = E(r)\hat{e}_r$

Ley de Gauss: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$

Tomo esfera gaussiana concéntrica a la nube esférica, con radio r

$$\bullet \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \oint E(r)\hat{e}_r \cdot \hat{n} da = E(r) \underbrace{\oint da}_{\substack{\text{área} \\ \text{de la esfera}}} = E(r) 4\pi r^2$$

r cte. en superficie donde integramos, entonces $E(r)$ cte. sale de la integral

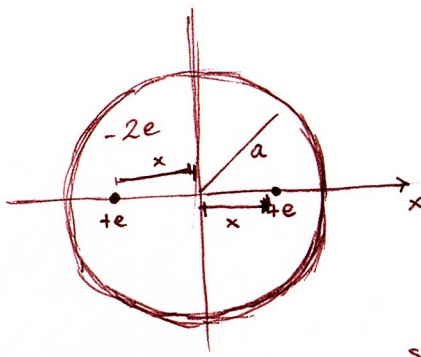
$\bullet Q_{enc} = \rho \times \text{volumen de la nube encerrado}$

$$\Rightarrow Q_{enc} = \begin{cases} \frac{-2e}{\frac{4}{3}\pi a^3} \frac{4}{3}\pi r^3 & \text{si } r \leq a \\ \frac{-2e}{\frac{4}{3}\pi a^3} \frac{4}{3}\pi a^3 = -2e & \text{si } r > a \end{cases}$$

Entonces:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{-2er}{4\pi\epsilon_0 a^3} \hat{e}_r & \text{si } r \leq a \\ \frac{-2e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r & \text{si } r > a \end{cases}$$

b)



posición de equilibrio: $\Sigma \vec{F}_i = 0$ sobre cada carga

* para la carga de la derecha:

$$\Sigma \vec{F}_i = \vec{F}_E = e \vec{E} = 0, \text{ donde } \vec{E} = \underbrace{\vec{E}_{\text{nube}}}_{\text{campo generado por la nube}} + \underbrace{\vec{E}_{\text{carga}}}_{\text{campo generado por la otra carga}}$$

si la carga está en $x < a$, el campo de la nube en esa posición es

$$\vec{E}_{\text{nube}} = \frac{-2ex}{4\pi\epsilon_0 a^3} \hat{x}$$

y el campo de la otra carga

$$\vec{E}_{\text{carga}} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 (2x)^2} \hat{x}$$

↪ dist. entre las cargas es $2x$

entonces:

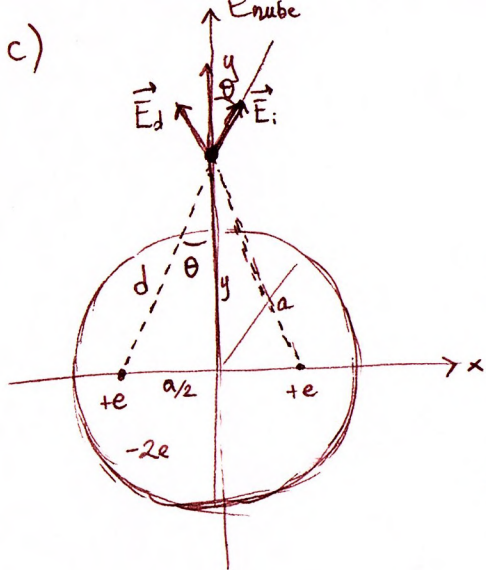
$$e \vec{E} = e \left[\frac{-2ex}{4\pi\epsilon_0 a^3} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 (2x)^2} \right] \hat{x} = 0 \Rightarrow \frac{-2ex}{4\pi\epsilon_0 a^3} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 (2x)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x}{a^3} + \frac{1}{(2x)^2} = 0 \Rightarrow (2x)^3 = a^3 \Rightarrow \boxed{x = \frac{a}{2}}$$

* la carga de la izquierda tiene que estar entonces en $\boxed{x = -\frac{a}{2}}$. Vemos que esto verifica condición de equilibrio:

$$\vec{F}_E = e \vec{E} = e [\vec{E}_{\text{nube}} + \vec{E}_{\text{carga}}] = e \left[\frac{2e(a/2)}{4\pi\epsilon_0 a^3} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^2} \right] \hat{x} = e \left[\frac{2(a/2)}{a^3} - \frac{1}{a^2} \right] \hat{x} = 0$$

c)



Tomamos un punto arbitrario en la mediatriz del segmento que une las cargas (eje y), a distancia y del centro de la nube. El campo en ese punto es

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{nube}} + \vec{E}_i + \vec{E}_d$$

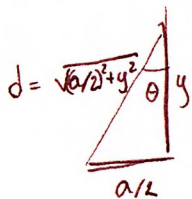
\vec{E}_i : campo carga izquierda
 \vec{E}_d : campo carga derecha

• el campo de la nube es

$$\vec{E}_{\text{nube}} = \frac{-2e}{4\pi\epsilon_0 y^2} \hat{y}$$

• los campos de las cargas tienen por simetría la misma componente \hat{y} y componentes \hat{x} opuestas. La suma entonces es

$$\vec{E}_i + \vec{E}_d = 2 \overset{\text{módulo de } \vec{E}_i}{E_i} \hat{y} = 2 E_d \hat{y} = 2 E_i \cos\theta \hat{y}$$



$$\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (a/2)^2}}$$

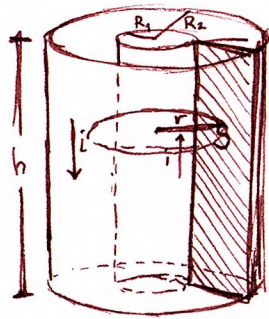
$$E_i = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 d^2} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + (a/2)^2)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_i + \vec{E}_d = \frac{2ey}{4\pi\epsilon_0 [y^2 + (a/2)^2]^{3/2}} \hat{y}$$

Entonces

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{y}{[y^2 + (a/2)^2]^{3/2}} - \frac{1}{y^2} \right] \hat{y}}$$

Ejercicio 2.



a) La inductancia L se define como

$$\mathcal{E}_L = L \frac{di}{dt}$$

donde \mathcal{E}_L es la magnitud de la fem inducida, en este caso sobre el borde de la superficie S_r , y $\frac{di}{dt}$ la magnitud de la derivada de la corriente, de modo que $L > 0$.

Tenemos por ley de Faraday:

$$\mathcal{E}_L = \left| - \frac{d\Phi_B}{dt} \right|$$

Campo magnético sobre superficie S : $\vec{B} = B(r)\hat{e}_\phi$ por simetría (despreciando efectos de borde)

Ampère en anillo de radio $R_1 < r < R_2$, coaxial con el cilindro y parametrizado en sentido antihorario:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B(r)\hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi dl = B(r) \underbrace{\oint dl}_{\substack{\text{long.} \\ \text{de la} \\ \text{curva}}} = B(r) 2\pi r$$

cte en anillo
versor \parallel a la curva

$$\mu_0 i_{\text{enc}} = \mu_0 i$$

corriente por cilindro interior

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{e}_\phi \quad \text{en } R_1 < r < R_2, \quad 0 < z < h$$

Entonces el flujo a través de S , ~~en~~ tomando la normal según \hat{e}_ϕ

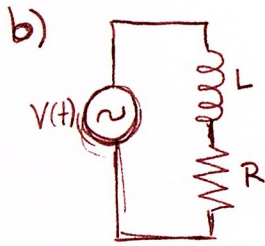
$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a} = \int_S \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi h dr = \frac{\mu_0 i h}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i h}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

y

$$\mathcal{E}_L = \left| -\frac{d\Phi_B}{dt} \right| = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \frac{di}{dt}$$

por lo que la inductancia es

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$



$$\tilde{V} = V_0 e^{j\omega t}; \quad \omega = 2\pi f$$

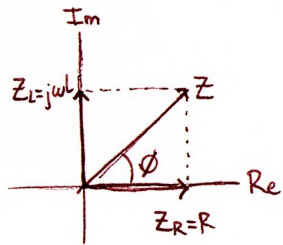
faseor voltaje en la fuente

$\tilde{V} = Z \tilde{I}$, donde Z es la impedancia equivalente

Como R , L están en serie: $Z = Z_R + Z_L = R + j\omega L$

Reescribimos Z como

$$Z = |Z| e^{j\phi}, \quad |Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \phi = \arctan \frac{\text{Im} Z}{\text{Re} Z} = \arctan \frac{\omega L}{R}$$



$$\Rightarrow \tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{Z} = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{|Z| e^{j\phi}} = \frac{V_0}{|Z|} e^{j(\omega t - \phi)} \Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \phi)$$

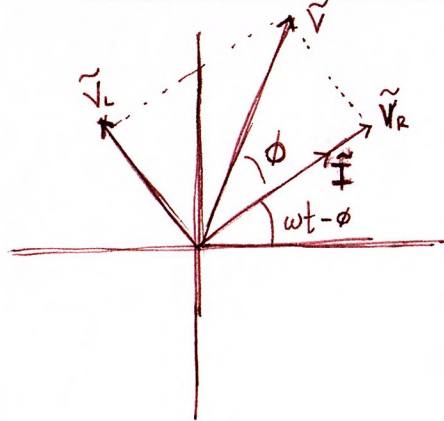
Amplitud: $I_0 = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$, podemos sustituir L por lo hallado en parte a):

Desfase: $\phi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$

$$\left\{ \begin{aligned} I_0 &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (2\pi f \mu_0 h \ln(R_2/R_1)/2\pi)^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + [\mu_0 h \ln(R_2/R_1)]^2}} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{\mu_0 h \ln(R_2/R_1)}{R}\right) \end{aligned} \right.$$

$$c) \tilde{V} = V_0 e^{j\omega t}$$

$$\tilde{I} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j(\omega t - \phi)}$$



$$\tilde{V}_R = R\tilde{I} = \frac{V_0 R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j(\omega t - \phi)}$$

$$\tilde{V}_L = j\omega L\tilde{I} = \frac{V_0 \omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j(\omega t - \phi + \pi/2)}$$

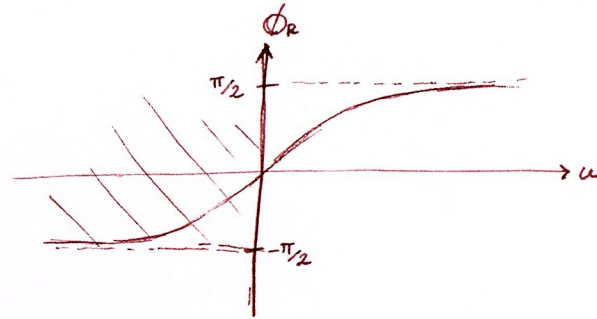
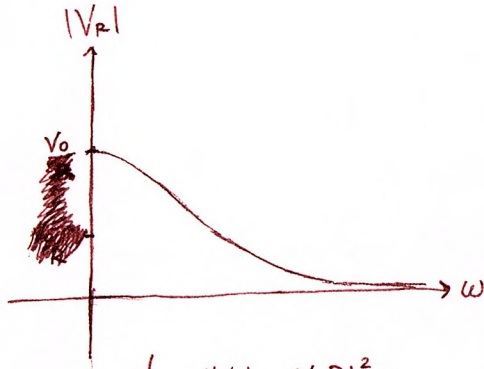
$\rightarrow j = e^{j\pi/2}$

d) $\tilde{V}_R = \frac{V_0 R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} e^{j(\omega t - \phi)}$ → desfase respecto a la fuente es ϕ

Entonces

$$|V_R| = \frac{V_0 R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$\phi_R = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$



↳ $\frac{d|V_R|}{d\omega} = \frac{V_0 R L^2 \omega}{(R^2 + (\omega L)^2)^{3/2}}$ sólo se anula en 0, $\frac{d^2|V_R|}{d\omega^2} = \frac{V_0 R L^2}{[R^2 + (\omega L)^2]^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{2\omega^2 L^2}{R^2 + (\omega L)^2}\right)$, se anula en $\omega = \frac{R}{\sqrt{2}L}$

- En $\omega \rightarrow 0$: $|V_R| \rightarrow V_0$
 $\phi_R \rightarrow 0$ (límite corriente continua, el voltaje en el inductor es 0)
- En $\omega \rightarrow \infty$: $|V_R| \rightarrow 0$
 $\phi_R \rightarrow \pi/2$

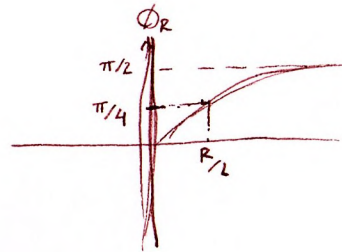
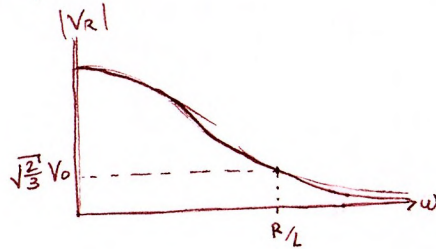
e) Potencia media disipada por la resistencia:

$$\bar{P}_R = RI_{rms}^2 = \frac{1}{2} R I_0^2 = \frac{R V_0^2}{2(R^2 + (\omega L)^2)}$$

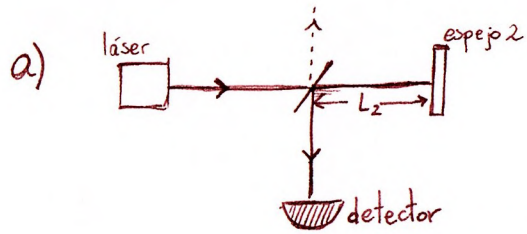
máxima disipación: $\omega = 0 \rightarrow \bar{P}_R = \frac{R V_0^2}{2R^2} = \frac{V_0^2}{2R}$

$$\rightarrow \bar{P}_R(\omega) = \frac{V_0^2}{4R} = \frac{R V_0^2}{2(R^2 + (\omega L)^2)} \rightarrow \frac{1}{2R} = \frac{R}{[R^2 + (\omega L)^2]} \rightarrow 2R^2 = [R^2 + (\omega L)^2] \rightarrow \omega L = R \rightarrow \boxed{\omega = \frac{R}{L}}$$

mitad
de disipación máx.



Ejercicio 3.



onda plana: ~~onda plana~~

$$E = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

potencia por unidad de área de una onda EM se describe con

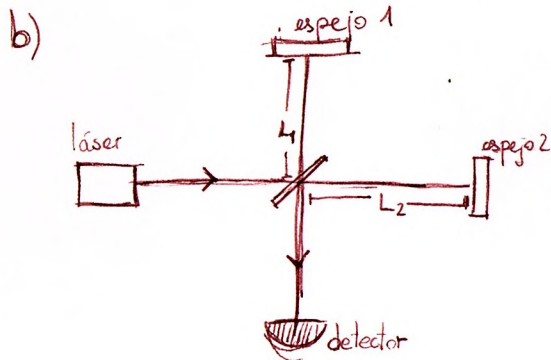
$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (\text{vector de Poynting})$$

$|\vec{S}|$ es la magnitud de la potencia, dirección indica hacia dónde es el flujo de energía

Para una onda plana: $E = cB$, y $S = \frac{1}{\mu_0} EB \Rightarrow S = \frac{1}{\mu_0 c} E^2$

Si el detector mide una potencia por unidad de área P_0/A (mide potencia media)

$$\frac{P_0}{A} = \bar{S} = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2 \longrightarrow \boxed{E_0 = \sqrt{2\mu_0 c P_0/A}}$$



- las ondas que recorren los dos brazos del interferómetro están en fase antes de llegar al divisor
- las dos ondas son reflejadas una vez en un espejo y una vez en el divisor antes de llegar al detector
→ su fase relativa no cambia por la reflexión
- las ondas recorren dos veces la distancia del divisor al espejo → la diferencia de longitud entre sus trayectorias es

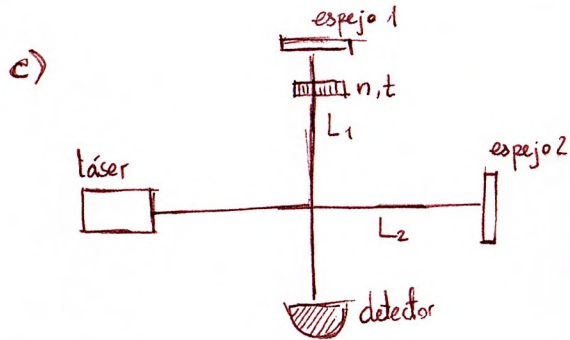
$$\Delta r = 2L_2 - 2L_1 = 2(L_2 - L_1) = 2\Delta L$$

para que haya interferencia constructiva (máx. de la potencia): Δr debe ser un número entero de longitudes de onda, de modo que la fase relativa entre ambas ondas sea 0:

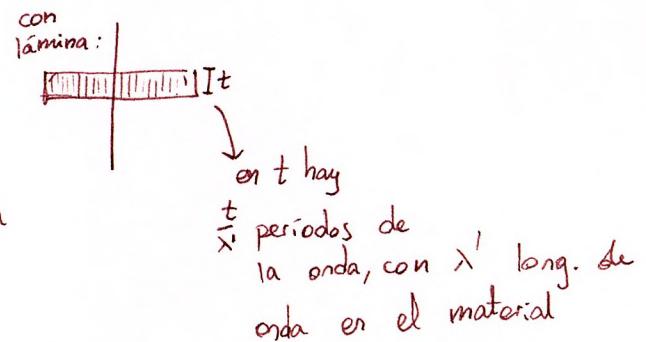
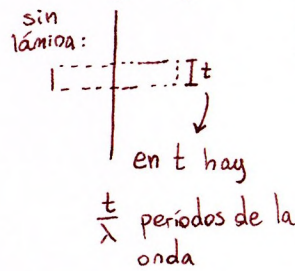
$$\Delta r = 2\Delta L = n\lambda$$

para que haya interferencia destructiva (potencia 0): desfase debe ser medio período $\rightarrow \Delta r$ es un número semientero de longitudes de onda

$$\Delta r = 2\Delta L = (n + \frac{1}{2})\lambda$$



desfase que introduce la lámina



El número de períodos en que se desfase la onda por la presencia del material es

$$m = \frac{2t}{\lambda'} - \frac{2t}{\lambda}$$

(factor de 2 porque pasa 2 veces por la lámina)

Para que haya máx. de interferencia, m debe ser entero

tenemos que:

$$c = \frac{\lambda}{T} \text{ (sin lámina)}, \quad v = \frac{\lambda'}{T} \text{ (con lámina)}$$

\rightarrow frecuencia no cambia

$$\rightarrow \frac{c}{\lambda} = \frac{v}{\lambda'} \rightarrow \frac{c}{v} \lambda' = \lambda \rightarrow n \lambda' = \lambda$$

\hookrightarrow índice de refracción

Para que haya un máximo de interferencia:

$$m = 2t \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{2t}{\lambda} (n-1) \rightarrow m\lambda = 2t(n-1)$$

El mínimo t que produce un máximo corresponde a $m=1$

$$t_{\min} = \frac{\lambda}{2(n-1)}$$