SOLUCIONES SEGUNDO PARCIAL CÁLCULO 1. 07/07/2012

Ejercicio 1. a. Ver teórico.

b. i) Del teorema fundamental del cálculo, $F'(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$ y haciendo el cálculo directo resulta que $G'(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$. Las funciones F y G tienen igual derivada por lo tanto difieren en una constante, es decir, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) - G(x) = k$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Luego si evaluamos en $x = 0$ resulta que $k = 0$ por lo tanto $F = G$.

ii) $\int_0^1 \operatorname{arc\,tg}(t)\,dt = F(1) = G(1) = \operatorname{arc\,tg}(1) - \frac{1}{2}\log(2) = \frac{\pi}{4} - \frac{\log(2)}{2}$.

Ejercicio 2. a. Haciendo el cambio de variable $u = \log t$ resulta,

$$F(x) = \int_{\log a}^{\log x} \frac{1}{(1+u)u}\,du.$$

Aplicando en la última integral el método de fracciones simples queda,

$$F(x) = (-\log(1+u)+\log u)|_{\log a}^{\log x} = \log\left(\frac{u}{1+u}\right)|_{\log a}^{\log x} = \log\left(\frac{\log x}{1+\log x}\right) - \log\left(\frac{\log a}{1+\log a}\right).$$

b. $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{\log x}{1+\log x}\right) - \log\left(\frac{\log a}{1+\log a}\right)$, entonces $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \log 2$ si y sólo si $\log\left(\frac{1+\log a}{\log a}\right) = \log 2$ ya que $\lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{\log x}{1+\log x}\right) = 0$, y esto ocurre si y sólo si $a = e$.

c.

$$\lim_{a\to 1} \int_a^2 f(t)\,dt = \log\left(\frac{\log 2}{1+\log 2}\right) - \lim_{a\to 1} \log\left(\frac{\log a}{1+\log a}\right) = +\infty$$

Por lo tanto la integral es divergente.

Ejercicio 3. a. Ver teórico.

b. i) Lo demostraremos usando el método de inducción completa: paso base $a_1 = \sqrt{2} < 2$, hipótesis de inducción $a_n < 2$ queremos demostrar que $a_{n+1} < 2$. Observar que $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = 2$ (usando la hipótesis de inducción).

ii) $a_{n+1} \geq a_n$ si y sólo si $\sqrt{2+a_n} \geq a_n$ si y sólo si $a_n^2 - a_n - 2 \leq 0$. El polinomio $p(x) = x^2 - x - 2$ tiene raíces en 2 y -1 y p toma valores negativos en el intervalo $[-1, 2]$, intervalo que contiene a $\{a_n\}$.

iii) Al ser monótina creciente y acotada, sabemos que tiene límite. Para calcularlo resolvemos la ecuacin $l = \sqrt{2+l}$ que equivale a estudiar las raíces del polinomio p de las parte anterior y al ser una sucesión de términos positivos, el límite debe ser 2.

Ejercicio 4. La serie (1), si usamos el criterio de la raíz n-ésima, queda convergente ya que:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{e^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n}^3}{e} = \frac{1}{e} < 1.$$

Otra forma de resolverlo es usando el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3}{e^{n+1}} \frac{e^n}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{e} < 1$$

La serie (2) es equivalente a la serie de término general $\frac{1}{n}$ por lo tanto es divergente. Otra forma de llegar a este resultado es observar que

$$\frac{n^2+1}{n^3} \geq \frac{1}{n}$$

y aplicar el criterio de la mayorante.