Universidad de la República **Cálculo 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo semestre 2012**

PRIMER PARCIAL
29 DE SETIEMBRE DE 2012

Soluciones múltiple opción (Total: 20 puntos)

En cada pregunta hay una sola opción correcta.

Respuesta correcta: 5 puntos Respuesta incorrecta: -1 puntos No responde: 0 punto

Versión 1: "La ecuación $z^4 = -4$ ..."

A	B	C	B

Versión 2: "Considere el conjunto ..."

A	C	A	B

Versión 3: "Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ..."

D	C	D	E

Versión 4: "Se consideran las funciones $f,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$ y f_5 ..."

E	C	B	B

Soluciones desarrollo (Total: 20 puntos)

Ejercicio 1.
(8 puntos)
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y la sucesión $a_n = f(n)$ tal que existe $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$.

1. ¿Es cierto que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$? Demuestre o proporcione un contraejemplo.

   Es falso. Se considera el siguiente el contraejemplo: sea $f(x) = \text{sen}\ (\pi x)$. Tomemos $\{a_n\} : a_n = f(n) = \text{sen}\ (n\pi)$, entonces $a_n = 0$ para todo n y se cumple que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, pero no existe $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Se supone además que f es monótona (creciente o decreciente). ¿Es cierto que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$? Demuestre o proporcione un contraejemplo.

   Sabemos que $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ y supongamos que f es monótona creciente (la demostración es análoga si suponemos que f es monótona decreciente). Vamos probar que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, esto es, probaremos que dado $0 < \varepsilon$ existe $n_0 > 0$ tal que para todo $n_0 < x$ se cumple $|l - f(x)| < \varepsilon$:

   Como f es monótona creciente a_n es monótona creciente y $a_n \leq l$ para todo n.

   Como $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 > 0$ tal que para todo $n \geq n_0$ entonces $|a_n - l| = l - a_n < \varepsilon$.

   .Sea $x > n_0$, entonces $f(n_0) \leq f(x)$. Además para dicho x existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$, de donde $f(n) \geq f(x)$, y por tanto $f(n_0) \leq f(x) \leq f(n) \leq l$. Esto implica que $0 \leq l - f(n) \leq l - f(x) \leq l - f(n_0) < \varepsilon$, por lo que $0 \leq l - f(x) < \varepsilon$.

Ejercicio 2.
(12 puntos)
Sea $f : D(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

1. Defina derivada de f en a.

   Sea $a \in D$ un punto de acumulación de D tal que existe un entorno de a contenido en D.

   f es derivable en a si existe y es finito $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, en cuyo caso $f'(a)$ es la derivada de f en a.

2. *a*) Demuestre que si f es derivable en a entonces f es continua en a.

   Esta es una de las posibles formas de demostrar lo pedido:
   Como f es derivable en a, existe $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, por tanto dado $0 < \varepsilon$ existe $0 < \delta$ tal que $f'(a) - \varepsilon \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq f'(a) + \varepsilon$.
   Multiplicando por $x - a$ tenemos $(f'(a) - \varepsilon)(x - a) \leq f(x) - f(a) \leq (f'(a) + \varepsilon)(x - a)$ si $0 < x - a$, y $(f'(a) - \varepsilon)(x - a) \geq f(x) - f(a) \geq (f'(a) + \varepsilon)(x - a)$ si $x - a < 0$.
   En ambos casos tomando límite cuando x tiende a a tenemos que $f(x) - f(a)$ tiende a cero cuando x tiende a a, de donde f es continua en a.

   b) ¿Es cierto el recíproco? Demuestre o proporcione un contraejemplo.

   No es cierto el recíproco, la función $f(x) = |x|$ es continua en 0 pero no es derivable en 0 porque $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ y $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$.

3. Sea $f : D(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 3x - 2\log x$.

   a) Halle el dominio de f y estudie continuidad y derivabilidad. Justifique.

   Como f es la suma de un polinomio (dominio $\mathbb{R}$) y la función logaritmo (dominio $(0, +\infty)$). Por tanto el dominio de f es $D = (0, +\infty)$.
   f es continua en D (es la suma de dos funciones continuas en D) y derivable en D (suma de funciones derivables en D). Además $f'(x) = 2x - 3 - \frac{2}{x}$.

   b) (i) Halle el máximo intervalo que contenga a $x = 1$ donde se pueda definir la inversa de f. Justifique.

   Para ver dónde se puede definir la inversa vemos en que parte de D la función f es estrictamente monótona, para ello estudiamos el signo de $f'(x) = \frac{2x^2-3x-2}{x}$.
   Como f' se anula en $x = 2$ y es negativa en $(0, 2)$, luego el máximo intervalo que contiene a $x = 1$ donde f es invertible es $(0, 2)$ (allí la función es invertible porque es estrictamente decreciente).

   (ii) Sea g esa inversa. Calcule $g'(f(1))$. Justifique.

   Sea $I = f((0, 2))$, se define $g : I \to (0, 2)$. Como f es derivable en $(0, 2)$ y su derivada es no nula allí, g es derivable en I y $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$, de donde $g'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{3}$.