SOLUCIONES PRIMER PARCIAL CÁLCULO 1. 08/05/2012

Versión 1

Ejercicio 1. Circunferencia de centro $(-1,-1)$ y radio 2.

Versión 2

Ejercicio 1. Circunferencia de centro $(-3,1)$ y radio 1.

Ejercicios de desarrollo.

Ejercicio 2. a. Como $|f(x)| \leq |x|$, para todo x, en particular vale para $x=0$, entonces $f(0)=0$. Luego $|f(x)-f(0)| = |f(x)| \leq |x|$, entones, dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta > 0$ tal que $\delta \leq \epsilon$ y f resulta continua en $x=0$.

b. Como $|f(x)| \leq |g(x)|$, para todo x, en particular vale para $x=0$ y al ser $g(0)=0$, resulta $f(0)=0$. Entonces $|f(x)-f(0)| = |f(x)| \leq |g(x)|$. Dado $\epsilon > 0$, basta tomar el $\delta > 0$ de la continuidad de g en 0 y f resulta continua en 0.

c. Observar que $|f(x)| \leq |x^4 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})| \leq x^4$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y la función $g(x) = x^4$ está en las hipótesis de la parte b) por lo tanto f queda continua en $x=0$.

Ejercicio 3. a. Ver teórico.

b. Sea $f(x) = x^2 - x\operatorname{sen}(x) - \cos(x)$. Queremos ver que esta función tiene exactamente dos raíces reales. La derivada de f resulta, $f'(x) = x(2-\cos x)$, la cual se anula unicamente en $x=0$. Estudiando el signo de f' vemos que f presenta un mínimo en $x=0$ donde $f(0)=-1<0$. Como $f(-2\pi)>0$ y f es decreciente, f tiene una sóla raíz en $[-2\pi,0]$ (Bolzano) y no tiene raíces en $(-\infty,-2\pi]$ ya que es decreciente. Un razonamiento análogo prueba que en $\mathbb{R}^+$ f tiene una sóla raíz, resultando que f tiene exactamente dos raíces reales.

Ejercicio 4. a. Los valores de las derivadas de f en $x=0$ son: $f(0)=f'(0)=f''(0)=f''''(0)=0$, $f'''(0)=-2$ y $f'''''=4$, entonces el polinomio de Taylor de f en $x=0$ resulta: $p(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{30}x^5$.

b. En un entorno de $x=0$ basta estudiar los extremos relativos de $p(x)$. Estudiando el signo de $p'(x) = x^2(\frac{1}{6}x^2-1)$ vemos que en un entorno de $x=0$ p es decreciente entonces no tiene ni máximo ni mínimo en $x=0$, por lo tanto f no tiene ni máximo ni mínimo relativo en $x=0$.

c.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+\frac{x^3}{3}}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{p(x)+r_5(x)+\frac{x^3}{3}}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{30}x^5+r_5(x)}{x^5} = \frac{1}{30} + \lim_{x\to 0}\frac{r_5(x)}{x^5} = \frac{1}{30}$$