Soluciones-examen
27/07/2012

Versión 1:

Ejercicio 1. $a = \frac{1}{2}$

Ejercicio 2. converge absolutamente y $|\int_2^{+\infty} f(t)\,dt| \leq \frac{1}{2}\log(3)$

Ejercicio 3. $2 + \frac{1}{2}\log 3$

Ejercicio 4. Tiene exactamente cuatro soluciones.

Versión 2:

Ejercicio 1. $a = 1$

Ejercicio 2. converge absolutamente y $|\int_2^{+\infty} f(t)\,dt| \leq \frac{1}{2}\log(5)$

Ejercicio 3. $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

Ejercicio 4. Tiene exactamente cuatro soluciones.

Ejercicios de desarrollo:

Ejercicio 5. a. Ver teórico.

b. i) Como consecuencia de la parte a) $f(x) = e^x(\lambda x^2 + (2\lambda + 1)x + 1)$. Luego, $f'(x) = e^x(\lambda x^2 + (4\lambda + 1)x + 2\lambda + 2)$. El discriminante de $\lambda x^2 + (4\lambda + 1)x + 2\lambda + 2$ es $8\lambda^2 + 1 > 0$ por lo tanto el polinomio tiene dos raíces reales y distintas. Finalmente estudiando el signo de este polinomio ($\lambda x^2 > 0$) resulta que a la derecha de la raíz mayor el signo es positivo, entre las raíces negativo y a la izquierda de la raíz menor positivo. Esto nos dice que f crece a la izquierda de la menor de las raíces y decrece a la derecha de la misma, por lo que en dicha raíz alcanza un máximo. Análogamente, mínimo en la mayor de las raíces.

ii) $f'(0) = 2(\lambda + 1)$ entonces $f'(0) = 4$ si y sólo si $\lambda = 1$. Entonces $f(x) = e^x(x^2 + x)$.

Ejercicio 6. a. Ver teórico.

b. i) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 e^{-x^2} = 0, \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \log(\alpha^2 - x^2) = \log(\alpha^2)$ Entonces, f es continua en 0 si y sólo si $\log(\alpha^2) = 0$, o sea $\alpha^2 = 1$ y como $\alpha > 0$, debe ser $\alpha = 1$.

ii) f es derivable en $x \neq 0$: $f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$, si $-1 < x < 0$ y $f'(x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$, si $x > 0$. En $x = 0$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2 e^{-h^2}}{h} = 0$$

y

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -\lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = -\lim_{h\to 0^-} h = 0$$

por lo tanto f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$. Luego $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = 0$ por lo tanto f' es continua en $x = 0$ y entonces es continua en $[0, +\infty)$. Por último basta observar que $\lim_{x\to +\infty} f'(x) = 0$, entonces existe $k > 0$ tal que $\forall x > k$, $|f'| \leq 1$ entonces f' queda acotada en $(k, +\infty)$. Como resultado de aplicar el teorema de Weierstrass en el intervalo $[0, k]$, f' resulta acotada en ese intervalo. Finalmente f' queda acotada en $[0, +\infty)$.

iii) Como f' es acotada en $[0, +\infty)$, existe $k > 0$ tal que $|f'(x)| < k$, $\forall x \in [0, +\infty)$. Luego sen x, $y \in [0, +\infty)$. Si $x = y$, el resultado es trivial, si $x \neq y$, supongamos $x < y$ (si $x > y$ la prueba es análoga) aplicamos el teorema de Lagrange (demostrado en la parte a)) en el intervalo $[x, y]$, y existe $c \in (x, y)$ tal que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ entonces $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||(x - y)| \leq k|(x - y)|$, resultando f Lipschitz en $[0, +\infty)$.