Segundo Parcial de Cálculo I

7 de julio de 2012

No. Parcial	Apellido y nombre	Cédula de Identidad

El parcial es sin material y no se puede usar calculadora. La duración es de 3 horas.

Ejercicio 1.
a)(10 puntos) Demostrar que, si la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $F(x) = \int_a^x f$ es derivable en el intervalo (a, b) y su derivada vale, $F'(x) = f(x)$.
b)(10 puntos) Se consideran las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \int_0^x \operatorname{Arctg}(t)\, dt \quad \text{y} \quad G(x) = x \operatorname{Arctg}(x) - \frac{1}{2}\log(1 + x^2)$$

i) Probar que $F(x) = G(x)$.

ii) Calcular $\int_0^1 \operatorname{Arctg}(t)\, dt$.

Sugerencia: No resolver las integrales de la parte b), usar la parte a).

Ejercicio 2.
Para $t > 0$ se considera la función

$$f(t) = \frac{1}{t(1 + \log t)\log t}$$

a)(10 puntos) Calcular $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, para $a > 1$, y $x > 1$.
b)(10 puntos) Hallar $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ tal que $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt = \log 2$.
c)(5 puntos) Clasificar $\int_1^2 f(t)\, dt$ y, en caso de convergencia calcular su valor.

Ejercicio 3.
a)(5 puntos) Probar que si la sucesión $\{a_n\}$ es no decreciente y acotada superiormente, entonces $\{a_n\}$ converge.
b)(6 puntos) Consideremos la sucesión $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ...

i) Probar que está acotada superiormente por 2.

ii) Probar que es monótona creciente.

iii) Deducir de la parte a) que converge y calcular el valor de convergencia.

Ejercicio 4.
(4 puntos) Estudiar la convergencia de las siguientes series justificando su respuesta.

$$(1) \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n} \qquad\qquad (2) \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$$