SOLUCIONES PRIMER PARCIAL CÁLCULO 1.
07/05/2010

Versión 1

Ejercicio 1. Existe algún hombre mortal.

Ejercicio 2. -1.

Ejercicio 3. 1.

Versión 2

Ejercicio 1. Existe algún dios inmortal.

Ejercicio 2. -2.

Ejercicio 3. -1.

Ejercicios de desarrollo.

Ejercicio 4. a. Por definición de desigualdad, $1-a$ es positivo (está en el conjunto que llamamos P). Como el producto es cerrado en los positivos (P), y por hipótesis a es positivo (está en P), entonces $a(1-a)$ es positivo (está en P). Por la propiedad distributiva, $a-a^2$ es positivo (está en P). Por la definición de desigualdad, $a^2 < a$.

b. Por definición de desigualdad, $a-b$ es positivo (está en P), y análogamente, $b-c$ es positivo (está en P). Como la suma es cerrada en los positivos (P), se deduce que $(a-b)+(b-c)$ está en P. Aplicando la asociativa y conmutativa, resulta que $(a-c)+(b-b)$ está en P. Por la existencia de opuesto, $(a-c)+0$ está en P. Por existencia de neutro, $a-c$ está en P. Nuevamente por definición de desigualdad, $a > c$.

c. Por definición de desigualdad, $a-1$ está en P. Como se admite que $1>0$ y por lo probado en b, resulta $a>0$. Como el producto es cerrado en P, resulta que $a(a-1)$ está en P. Aplicando la propiedad distributiva, a^2-a está en P. Nuevamente la definición de desigualdad permite escribir que $a^2 > a$.

Ejercicio 5. a. Ver teórico.

b. I) Por inducción completa probaremos primero que $x_n \geq 1 : x_0 = 1$, por lo tanto $x_0 \geq 1$. Suponiendo que $x_n \geq 1$, resulta, $x_{n+1} \geq \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} \geq 1$, como esperábamos. El mismo razonamiento hacemos para probar que $x_n \leq 2 : x_0 = 1$, por lo tanto $x_0 \leq 2$. Suponiendo que $x_n \leq 2$, resulta, $x_{n+1} \leq \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \leq 2$, como esperábamos. Resultando que $1 \leq x_n \leq 2$ para todo $n \geq 0$.

II) $x_{n+1} \geq x_n$ si y sólo si $2{x_n}^2 - 5x_n + 2 \leq 0$. La inecuación algebraica $2x^2 - 5x + 2 \leq 0$ tiene solución en los reales el intervalo cerrado $[\frac{1}{2}, 2]$, por lo tanto, como $1 \leq x_n \leq 2$, $2{x_n}^2 - 5x_n + 2 \leq 0$ se verifica para todo $n \geq 0$, de donde se deduce entonces que la sucesión es monótona creciente.

III) Como x_n está acotada y es monótona creciente tiene límite L. Además L debe ser solución de $2x^2 - 5x + 2 = 0$. Entonces como $1 \leq x_n \leq 2$, debe ser $L = 2$.

Ejercicio 6. a. Ver Figura 1.

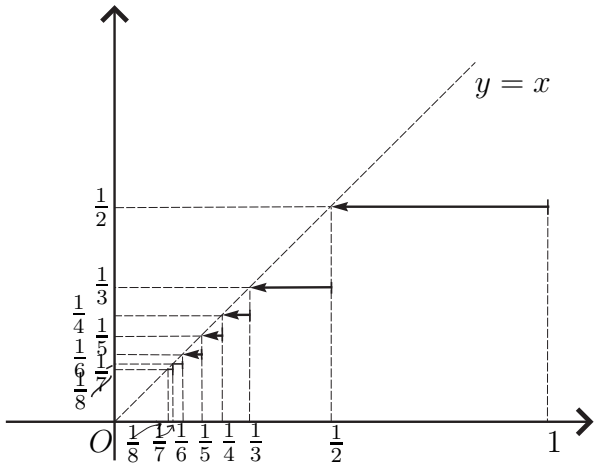

Figura 1: Bosquejo de $f(x)$ (Ejercicio 6.a.).

Si $x = 0$, se cumple $0 = f(0) \leq 0$ y si $x \neq 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < x < 1/(n+1)$, y entonces $f(x) = 1/n < x$, resultando $0 < f(x) < x$, para todo $x \in (0, 1]$.

b. Como se verifica $0 < f(x) < x$, para todo $x \in (0, 1]$, tenemos

$$0 = \lim_{x \to 0^+} 0 \leq \lim_{x \to 0^+} f(x) \leq \lim_{x \to 0^+} x = 0,$$

por lo tanto debe ser $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$. De aquí, f es continua en 0.

c. g es derivable en 0 si y sólo si existe el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}.$$

Ahora, $\dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{f(x)}{x}$, si $x \geq 0$ y $\dfrac{g(x)}{x} = 1$ si $x < 0$. Como por hipótesis

$$1 - x < \frac{f(x)}{x} < 1, \text{ entonces } 1 = \lim_{x \to 0^+} 1 - x \leq \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} \leq 1.$$

Luego $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ y entonces $\lim_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x} = 1$, con lo que probamos que g es derivable y que $g'(0) = 1$.