Primer Parcial de Cálculo 1.
Curso 2010

7 de mayo de 2010.

N. Parcial

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

El parcial es sin material y no se puede usar calculadora. La duración es de 4 horas.
Puntaje: El ejercicio 1. vale 1 punto, los ejercicios del 2., 3. y 4. valen 3 puntos y los ejercicios 5. y 6. valen 15 puntos. No se restan puntos.

Ejercicio 1.
Negar la proposición "Todos los hombres son inmortales" (no usar el adverbio no).

Ejercicio 2.
Sean $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{si } x \leq 1, \\ a^2x - 2, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

El valor de a que hace que f sea continua y no tenga extremos absolutos es:

Ejercicio 3.

La expresión en forma binómica del número complejo $\left(\dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{2}\right)^{16}$ es:

Ejercicio 4.
Sea A un cuerpo ordenado. Probar, enunciando qué propiedades o axiomas se usan en cada paso, que:
a) Si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$.
b) Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
c) Si $a > 1$, entonces $a^2 > a$. (Podrá admitirse que $1 > 0$.)

Ejercicio 5.
a) Probar que toda sucesión acotada y monótona creciente tiene límite.
b) Se considera la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{x_n}, \quad \text{para todo } n \geq 1. \end{cases}$$

i) Demostrar que $1 \leq x_n \leq 2$. (Sug. usar inducción completa.)
ii) Demostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente.
iii) Justificar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite y calcular su valor.

Ejercicio 6.
Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n-1}, \text{ para } n \geq 2, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Bosquejar el gráfico de f y deducir que $0 < f(x) < x$, $\forall\, x \in (0,1]$.
b) Probar que f es continua en $x = 0$. (Sug. usar parte anterior.)
Se define la función $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \geq 0, \\ x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

c) Si f cumple, $1 - x < \frac{f(x)}{x}$ para todo $x \in [0,1]$, probar que g es derivable en 0 y calcular $g'(0)$.