Soluciones-examen
14/12/2012

Versión 1:

Ejercicio 1. $a = 1$.

Ejercicio 2. Tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 3. $-\frac{1}{4}\log 3$.

Ejercicio 4. (I) converge, (II) diverge y (III) diverge.

Versión 2:

Ejercicio 1. Tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 2. $a = 1$.

Ejercicio 3. (I) converge, (II) diverge y (III) diverge.

Ejercicio 4. $-\frac{1}{4}\log 3$.

Ejercicios de desarrollo:

Ejercicio 1. a. i) Sea $k \in \mathbb{R}$. Como F no está acotada superiormente en $[a, +\infty)$, existe algún $x_0 > a$ tal que $F(x_0) > k$. Al ser F creciente se cumple que $F(x) \geq F(x_0)$, $\forall x \geq x_0$, y, por lo tanto, $F(x) > k$, $\forall x \geq x_0$. Hemos demostrado que para cada $k \in \mathbb{R}$ es posible encontrar un x_0 tal que $F(x) > k$, $\forall x \geq x_0$ lo que es equivalente a decir que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

ii) Por hipótesis F está acotada en $[a, +\infty)$. Sea $L = \sup\{F(x) : x \in [a, +\infty)\}$. Dado $\epsilon > 0$ arbitrario, es posible encontrar algún $x_0 > a$ tal que $L - \epsilon < F(x_0) \leq L$ (de lo contrario L no sería el supremo del conjunto considerado). Como F es creciente se cumple que $F(x) \geq F(x_0)$, $\forall x \geq x_0$, y, por lo tanto, $F(x) > L - \epsilon$, $\forall x \geq x_0$. Por otra parte, $F(x) \leq L$, $\forall x \geq x_0$ (ya que L es cota superior de los valores funcionales de F). Hemos demostrado que para cada $\epsilon > 0$ es posible encontrar x_0 tal que $L - \epsilon < F(x) \leq L$, $\forall x \geq x_0$, lo que es equivalente a decir que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = L$.

b. Sean F y G las primitivas correspondientes, es decir, $F(x) = \int_a^x f$ y $G(x) = \int_a^x g$, $(x \geq a)$. Como $0 \leq f(t) \leq g(t)$, $\forall t \in [b, +\infty)$, aplicando la propiedad de monotonía para integrales definidas tenemos que, $\forall x \in [b, +\infty)$,

$$F(x) = \int_b^x f \leq G(x) = \int_b^x g$$

i) Si $\int_a^{+\infty} f$ diverge, entonces $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ entonces (de la desigualdad anterior), $\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty$ y por lo tanto $\int_a^{+\infty} g$ diverge.

ii) Razonamos por absurdo. Supongamos que $\int_a^{+\infty} f$ no converge. Como f es no negativa $\int_a^{+\infty} f$ no puede oscilar y, por lo tanto, sería divergente. Aplicando lo demostrado en la parte anterior llegaríamos a concluir que $\int_a^x g$ también sería divergente lo cual contradice nuestra hipótesis.

c. Tenemos que $0 \leq \operatorname{sen}^2(t) \leq 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, en particular esta desigualdad vale en $[1, +\infty)$, entonces la función integrando, $f(t) = \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{t^2+1}$, cumple $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^2+1}$, $\forall t \in [1, +\infty)$. Vamos a estudiar la siguiente integral impropia,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\, dt$$

$$\int_1^x \frac{1}{t^2+1}\, dt = \operatorname{arc\,tg}(t)|_1^x = \operatorname{arc\,tg}(x) - \operatorname{arc\,tg}(1) = \operatorname{arc\,tg}(x) - \frac{\pi}{4}$$

Tomamos límite cuando $x \to +\infty$ y resulta,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2+1}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg}(x) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\, dt$ es convergente y como estamos en las hipótesis de la parte b)ii), $\int_1^{+\infty} f$ resulta convergente.

Ejercicio 2. a. i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un máximo (mínimo) relativo en $a \in \mathbb{R}$ si existe $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in \mathbb{R}$ con $|x - a| < \delta$, se cumple $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$). Decimos que f tiene un extremo relativo en a cuando f tiene un máximo o mínimo relativo en a.
ii) Definimos la siguiente función auxiliar:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & \text{si } x \neq a \\ f'(a), & \text{si } x = a \end{cases}$$

Como f es derivable en a, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ entonces F resulta continua en a y $F(a) = f'(a)$. Razonamos por absurdo. Supongamos que $f'(a) \neq 0$, por ejemplo, supongamos que $f'(a) > 0$. Entonces $F(a) > 0$. Según la propiedad de conservación del signo de las funciones continuas, existe un intervalo que contiene a a en el que F es positiva. Por lo tanto el signo del numerador, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, coincide con el signo del denominador, $x-a$, $\forall x \neq a$ en ese intervalo. Dicho de otro modo, $f(x) > f(a)$ cuando $x > a$ y, $f(x) < f(a)$ cuando $x < a$. Esto contradice la hipótesis de que f tiene un extremo relativo en a. Luego, la desigualdad, $F(a) > 0$ no es posible. Análogamente se demuestra que no puede ser $F(a) < 0$. Por consiguiente $F(a) = 0$, lo que prueba que $f'(a) = 0$.

b. El volumen de la lata es $V = \pi r^2 l = 330$ entonces $l = \frac{330}{r^2\pi}$. Luego el área de la lata está dada por $2\pi r l + 2\pi r^2$, sustituyendo l tenemos el área en función del radio

$$a(r) = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2.$$

Derivando, $a'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r$. La función a tiene un extremo relativo en $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Estudiando el signo de la derivada se puede ver que ese extremo es un mínimo. Por lo tanto la lata tiene área mínima si $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{330}{2\pi}}$. (Además se puede observar, despejando de la ecuación $a'(r) = 0$ que para el valor de r en el cual el área es mínima se cumple que $l = 2r$.)