# Examen de Cálculo I

27 de julio de 2012

| | | |
|---|---|---|
| No. de examen | Apellido y nombre | Cédula de Identidad |

El examen es sin material y no se puede usar calculadora. La duración es de 4 horas. Cada ejercicio de múltiple opción vale 10 puntos (restándose 2.5 puntos por cada respuesta incorrecta), y cada ejercicio de desarrollo vale 30 puntos. Para responder a los ejercicios de múltiple opción, se hace un circulito alrededor de la letra que corresponde a la respuesta correcta.

**Ejercicio 1.**
Indicar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \operatorname{sen}(x) - ax^2}{x^3} = \frac{1}{3}$$

(A) Sólo para $a = 1$.
(B) Para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$.
(C) Sólo para $a = 0$.
(D) Sólo para $a = \frac{1}{2}$.
(E) Para ningún valor de $a \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 2.**
Sea

$$f(t) = \frac{(t^2+1)\cos(t)}{t^4-1}$$

La integral impropia $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$,
(A) no converge, pues no existe $\lim_{x\to+\infty} \int_2^x f(t)\,dt$ (es decir, la integral impropia oscila).
(B) no converge, pues $\lim_{x\to+\infty} \int_2^x f(t)\,dt$ es infinito (es decir, la integral impropia diverge).
(C) converge absolutamente y $|\int_2^{+\infty} f(t)\,dt| \leq \frac{1}{2}\log(3)$.
(D) converge absolutamente y $\frac{1}{2}\log(3) < |\int_2^{+\infty} f(t)\,dt| \leq \frac{1}{2}\log(5)$.
(E) converge pero no converge absolutamente.

**Ejercicio 3.**
El valor de la integral

$$\int_1^e \frac{4\log(x)+3}{x(2\log(x)+1)}\,dx$$

es:
(A) $2 + \log 3$.
(B) $2 + \frac{1}{2}\log 3$.
(C) $2 - \log 3$.
(D) $2$.
(E) $\log 3 - \log 2$.

**Ejercicio 4.**
La ecuación $z^2 = \overline{z}$ en el plano complejo
(A) tiene una única solución.
(B) no tiene solución.
(C) tiene exactamente dos soluciones.
(D) tiene exactamente cuatro soluciones.
(E) tiene infinitas soluciones.

**Ejercicio 5.**
a)(10 puntos) Demostrar que, si la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $F(x) = \int_a^x f$ es derivable en el intervalo $(a, b)$ y su derivada es $F'(x) = f(x)$.
b) (20 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\int_0^x f(t)\,dt = (\lambda x^2 + x)e^x, \quad \text{para} \quad \lambda > 0.$$

i) Sin calcular $f''$, probar que $f$ tiene máximo y mínimo relativos.

ii) Determinar $f$ para que la tangente a su gráfica en $x = 0$ tenga pendiente 4.

**Ejercicio 6.**
a) (10 puntos) Sea $f$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$. Probar que existe $x \in (a, b)$ tal que

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

b) (12 puntos) Sea $f(x) = \log(\alpha^2 - x^2)$, si $x \in (-\alpha, 0]$ y $f(x) = x^2 e^{-x^2}$, si $x \geq 0$, donde $\alpha$ es un número real positivo.

i) Hallar $\alpha > 0$ para que $f$ sea continua en $x = 0$.

ii) Para el valor de $\alpha$ hallado, demostrar que $f$ es derivable en $x = 0$ y que $f'$ es acotada en $[0, +\infty)$.

Dada una función $f$ se dice que $f$ es Lipschitz en un conjunto $D$ si existe una constante $k > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \quad \forall x, y \in D$.
c) (8 puntos) Deducir de las partes anteriores que $f$ es Lipschitz en $[0, +\infty)$, justificando la respuesta.