**Universidad de la República** **Cálculo 1**
**Facultad de Ingeniería - IMERL**

Examen
14 de diciembre de 2012

| N$^o$ de examen | Cédula | Apellido y nombre | Salón |
|---|---|---|---|
| | | | |

## Múltiple opción (Total: 20 puntos)

En cada pregunta hay una sola opción correcta.

Respuesta correcta: 5 puntos  Respuesta incorrecta: -1 punto  No responde: 0 punto

**Ejercicio 1.**
La ecuación $z + \overline{z} = |z|^2$ en el plano complejo,

(A) tiene una única solución. (B) tiene solo dos soluciones. (C) tiene solo cuatro soluciones.

(D) tiene infinitas soluciones. (E) no tiene solución.

**Ejercicio 2.**
Indicar para que valores de $a \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 + x - \cos x - ae^x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

(A) Solo para $a = 1$. (B) Solo para $a = 0$. (C) Solo para $a = \frac{1}{2}$.

(D) Para ningún valor de $a \in \mathbb{R}$. (E) Para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 3.**
Sean $(a_n)$, $(b_n)$ y $(c_n)$ sucesiones reales tales que $0 < b_n < a_n < 1$ para todo $n \geq 0$, $c_n = \dfrac{1 - a_n}{1 + b_n}$, y la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge (II) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \log b_n$ diverge (III) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ diverge

(A) Todas son correctas. (B) Solo (II) es correcta. (C) Solo (I) y (III) son correctas.

(D) Ninguna es correcta. (E) Solo (II) y (III) son correctas.

**Ejercicio 4.**
El valor de la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t - 4}\, dt$$

es:

(A) $-\frac{1}{4}\log 3$. (B) $2 - \log 3$. (C) $2$. (D) $\log 3 - \log 4$. (E) $\log 3$.

**Universidad de la República** **Cálculo 1**
**Facultad de Ingeniería - IMERL**

Examen
14 de diciembre de 2012

| N$^o$ de examen | Cédula | Apellido y nombre | Salón |
|---|---|---|---|
| | | | |

## Desarrollo (Total: 40 puntos)

**Ejercicio 1.**
**(24 puntos)**

a) Sea $F : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función creciente en $[a, +\infty)$. Probar que:

   i) Si $F$ no está acotada superiormente en $[a, +\infty)$, entonces $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

   ii) Si $F$ está acotada superiormente en $[a, +\infty)$, entonces $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ existe y es finito.

b) Sean $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ funciones continuas, no negativas en $[a, +\infty)$ tales que $f \leq g$ en $[b, +\infty)$ (donde $a < b$). Probar que:

   i) Si $\int_a^{+\infty} f$ diverge, entonces $\int_a^{+\infty} g$ diverge.

   ii) Si $\int_a^{+\infty} g$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} f$ converge.

c) Clasifique $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{t^2+1} dt$.

**Ejercicio 2.**
**(16 puntos)**

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$.

   i) Definir extremo relativo de $f$ en $a$.

   ii) Probar que si $f$ es derivable en $\mathbb{R}$ y tiene un extremo relativo en $a$, entonces $f'(a) = 0$.

b) Se quiere fabricar latas de refresco (cilíndricas) de volumen 330 $cm^3$. Si $r$ es el radio de la base y $l$ es la altura de la lata (en $cm$), hallar $r$ y $l$ de manera de minimizar la cantidad de material necesario para cada lata.