Universidad de la República **Cálculo 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL

Examen
14 de diciembre de 2012

N^o de examen	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Múltiple opción (Total: 20 puntos)

En cada pregunta hay una sola opción correcta.

Respuesta correcta: 5 puntos Respuesta incorrecta: -1 punto No responde: 0 punto

Ejercicio 1.
Indicar para que valores de $a \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 + x - \cos x - ae^x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

(A) Para cualquier valor de $a \in \mathbb{R}$. (B) Solo para $a = 0$. (C) Solo para $a = 1$.

(D) Solo para $a = \frac{1}{2}$. (E) Para ningún valor de $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.
La ecuación $z + \overline{z} = |z|^2$ en el plano complejo,

(A) no tiene solución. (B) tiene solo dos soluciones. (C) tiene una única solución.

(D) tiene solo cuatro soluciones. (E) tiene infinitas soluciones.

Ejercicio 3.
El valor de la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t - 4}\, dt$$

es:

(A) $\log 3$. (B) $2 - \log 3$. (C) $-\frac{1}{4}\log 3$. (D) 2. (E) $\log 3 - \log 4$.

Ejercicio 4.
Sean (a_n), (b_n) y (c_n) sucesiones reales tales que $0 < b_n < a_n < 1$ para todo $n \geq 0$, $c_n = \frac{1 - a_n}{1 + b_n}$, y la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge (II) $\sum_{n=0}^{+\infty} \log b_n$ diverge (III) $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ diverge

(A) Solo (II) y (III) son correctas. (B) Solo (II) es correcta. (C) Todas son correctas.

(D) Solo (I) y (III) son correctas. (E) Ninguna es correcta.

Universidad de la República **Cálculo 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL

Examen
14 de diciembre de 2012

N^o de examen	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Desarrollo (Total: 40 puntos)

Ejercicio 1.
(24 puntos)

a) Sea $F : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función creciente en $[a, +\infty)$. Probar que:

   i) Si F no está acotada superiormente en $[a, +\infty)$, entonces $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

   ii) Si F está acotada superiormente en $[a, +\infty)$, entonces $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ existe y es finito.

b) Sean $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ funciones continuas, no negativas en $[a, +\infty)$ tales que $f \leq g$ en $[b, +\infty)$ (donde $a < b$). Probar que:

   i) Si $\int_a^{+\infty} f$ diverge, entonces $\int_a^{+\infty} g$ diverge.

   ii) Si $\int_a^{+\infty} g$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} f$ converge.

c) Clasifique $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(t)}{t^2+1} dt$.

Ejercicio 2.
(16 puntos)

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$.

   i) Definir extremo relativo de f en a.

   ii) Probar que si f es derivable en $\mathbb{R}$ y tiene un extremo relativo en a, entonces $f'(a) = 0$.

b) Se quiere fabricar latas de refresco (cilíndricas) de volumen 330 cm^3. Si r es el radio de la base y l es la altura de la lata (en cm), hallar r y l de manera de minimizar la cantidad de material necesario para cada lata.