Resolución del Examen de Cálculo 1, julio 2010.
Curso 2010

24 de julio de 2010.

VERSIÓN 1: Se considera la rotación dada por $f(z) = iz + 2 - 4i$.

Ejercicio 1. a. $3 - i$.

b. $\pi/2$ radianes.

Ejercicio 2. a. -4.

b. 49.

VERSIÓN 2: Se considera la rotación dada por $f(z) = iz + 1 - 3i$.

Ejercicio 1. a. $2 - i$.

b. $\pi/2$ radianes.

Ejercicio 2. a. -3.

b. 39.

Ejercicio 3. a. De $h \leq f(x) \leq H$ se deduce $h(b-a) = \int_a^b h\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b H\,dx = H(b-a)$. Luego, $h \leq \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq H$. Denotando $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$, resulta que $\mu \in [h, H]$, y que se cumple $\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$.

b. Apliquemos el ítem anterior a $h = \text{mín}\{f(x);\, x \in [a,b]\}$ y $H = \text{máx}\{f(x);\, x \in [a,b]\}$, la función f toma valores entre h y H, por lo que existe $\mu \in [h, H]$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a)$. Los valores de h y H existen y son alcanzados por f por el teorema de Weierstrass. Al ser f continua en el intervalo $[a,b]$, toma todos los valores intermedios entre h y H, en particular, el valor μ, lo que prueba que existe ξ tal que $f(\xi) = \mu$, y probando la afirmación.

Un ejemplo que muestra que se necesita la continuidad para que la afirmación sea cierta está dada por $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

En este ejemplo, $\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$, que no es alcanzado por f.

c. Sean $h = \text{mín}\{f(x);\, x \in [a,b]\}$ y $H = \text{máx}\{f(x);\, x \in [a,b]\}$. Como g es no negativa, entonces para todo x resulta $hg(x) \leq f(x)g(x) \leq Hg(x)$. Integrando término a término: $h\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b hg(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \int_a^b Hg(x)\,dx = H\int_a^b g(x)\,dx$. Como g es continua y positiva, entonces $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ y por lo tanto se puede dividir término a término la anterior desigualdad sin alterarla, obteniendo

$$h \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq H.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = \mu \in [h, H].$$

La existencia de ξ se termina como en el segundo ítem: al ser f continua, toma todos los valores entre h y H, en particular, μ. Esto prueba que existe $\xi \in [a, b]$ tal que

$$f(\xi) = \mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}.$$

Ejercicio 4. a.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{xg(x)}{x} = g(0)$$

por la continuidad de g.

b. En $\mathbb{R}\setminus 0$, es aplicable la regla de derivación de un producto: $f'(x) = g(x) + xg'(x)$. En el ítem anterior se probó que es derivable en 0, luego, f es derivable en $\mathbb{R}$. Además, al tener g derivada continua en $\mathbb{R} \setminus 0$, resulta que f tiene derivada continua en $\mathbb{R} \setminus 0$. También la derivada es continua en 0, porque $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} xg'(x) + g(x) = g(0) = f'(0)$. (Se usó la acotación de $g'(x)$, y la continuidad de g.)

c. Ver teórico.

d. Si existe c, debe cumplir que $4 + 1 = 3f'(c)$, de donde $f'(c) = 5/3$. Probando con $c \neq 0$, se debe cumplir que $|c| + |c| = 5/3$, de donde $c = \pm 5/6$. Están en el intervalo $(-1, 2)$, cualquiera de esos valores es respuesta.

Ejercicio 5. a. Para el caso particular $k = 1$, integrando mediante el cambio de variable $u = \log x$, resulta

$$\int_1^x \frac{\log x}{x}\,dx = \frac{\log^2 x}{2},$$

que diverge si x tiende a infinito. Si $k \neq 1$, integrando por partes,

$$\int_1^x \frac{\log x}{x^k}\,dx = \frac{x^{1-k}}{1-k}\left(\log x - \frac{1}{1-k}\right) + \frac{1}{(1-k)^2}.$$

Esta función converge cuando x tiende a infinito solamente si $k > 1$. En ese caso,

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^k}\,dx = \frac{1}{(1-k)^2}.$$

En resumen, la integral converge si y solamente si $k > 1$, y el valor de la integral es

$$\frac{1}{(1-k)^2}.$$

b. $e^{\frac{\log n}{n^k}} - 1$ no tiende a 0 si $k \leq 0$, por lo tanto la serie no puede converger. Si $k > 0$, el término general es equivalente a $\frac{\log n}{n^k}$. Por el criterio integral, la serie con este término general converge si y solamente si $k > 1$. Luego, la serie dada converge solamente si $k > 1$.