**Universidad de la República** **Cálculo 1**
**Facultad de Ingeniería - IMERL** **Primer semestre 2011**

PRIMER PARCIAL
06 DE MAYO DE 2011

| Nro de Parcial | Cédula | Apellido y nombre |
|---|---|---|
| | | |

1. **(4 puntos si la respuesta es correcta, 0 punto si no contesta, $-1$ punto si es incorrecta)**

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 \text{ si } x \leq a \\ 2ax - 1 \text{ si } x > a \end{cases}$ con $a \in \mathbb{R}$.

   Marque con un círculo la opción correcta:

   *a*) El valor de $a$ para el cual $f$ es continua e invertible es $-2$.
   *b*) El valor de $a$ para el cual $f$ es continua e invertible es 0.
   *c*) El valor de $a$ para el cual $f$ es continua e invertible es 2.
   *d*) El valor de $a$ para el cual $f$ es continua e invertible es $-1$.
   *e*) El valor de $a$ para el cual $f$ es continua e invertible es 1.

2. **(4 puntos si la respuesta es correcta, 0 punto si no contesta, $-1$ punto si es incorrecta)**

   Marque con un círculo la opción correcta:

   *a*) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}} = e^4$.
   *b*) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}} = 0$.
   *c*) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}} = 1$.
   *d*) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}} = +\infty$.
   *e*) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}} = e^{-4}$.

3. **(4 puntos si la respuesta es correcta, 0 punto si no contesta, $-1$ punto si es incorrecta)**

   Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Marque con un círculo la opción correcta:

   *a*) $f$ es derivable en $0 \Leftrightarrow \alpha > 1$.
   *b*) $f$ es derivable en $0 \Leftrightarrow \alpha \geq 1$.
   *c*) $f$ es derivable en $0 \Leftrightarrow \alpha > 0$.
   *d*) $f$ no es derivable en 0 para ningún valor de $\alpha$.
   *e*) $f$ es derivable en $0 \Leftrightarrow \alpha \geq 2$.

4. **(6 puntos)**
   Se considera el conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : z^6 = -8i,\ \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) < 0\}$.

   Entonces $S =$

5. **(4 puntos)** Se considera el conjunto $A = \left\{ \dfrac{4n}{n+1} + (-1)^n : n \in \mathbb{N},\, n \geq 1 \right\}$. En caso que existan, determinar supremo, infimo, máximo y mínimo de $A$.

   Supremo: Infimo: Máximo: Mínimo:

## Ejercicios de desarrollo

6. **(5 puntos)**
   Sea la sucesión definida por $x_1 \geq 0$ y la siguiente recurrencia:
   $$x_{n+1} = \sqrt{2x_n^2 + 1} \ \ \forall\, n \geq 1$$
   *a*) Estudiar monotonía de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
   *b*) Mostrar que la hipótesis de convergencia lleva a una contradicción.
   *c*) Calcular el límite de $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

7. **(13 puntos)** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.
   *a*) Definir (con epsilon y delta) continuidad de $f$ en un punto $a$.
   *b*) Negar la definición anterior.
   *c*) Probar la siguiente afirmación:
   si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ entonces $\forall\ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $x_n \neq a$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, se cumple que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.
   *d*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
   Probar que $f$ **no** es continua en $x = 0$.

| PARA USO DOCENTE. | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ej 1 | Ej 2 | Ej 3 | Ej 4 | Ej 5 | Ej 6a | Ej 6b | Ej 6c | Ej 7a | Ej 7b | Ej 7c | Ej 7d | Total |
| | | | | | | | | | | | | |