Universidad de la República **Cálculo 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo semestre 2012**

Segundo parcial - Solución
27 de noviembre de 2012

N^o de parcial	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Ejercicio 1.
(20 puntos)

1. Pruebe que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ es convergente.

   Tenemos que para todo $t > 1$ se cumple $0 \leq e^{-t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$, de donde, usando el criterio de comparación, como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge, entonces $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.

2. Sea $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$

   a) Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 de F alrededor de 0.
   Por el teorema fundamental del cálculo $F'(x) = 2xe^{-x^4}$ y derivando $F''(x) = e^{-x^4}(2-4x^3)$, de donde el polinomio de Taylor de orden 2 de F alrededor de 0 es x^2.

   b) Deduzca que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2} = 1$.

   Tenemos que $F(x) = x^2 + o(x^2)$, de donde $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2} = 1$.

3. Clasifique $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt$. (Sugerencia: use las partes 1. y 2.)

   Separamos la integral en dos $\displaystyle\int_0^{1} \frac{F(t)}{t^2}dt$ y $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt$. Probaremos que ambas integrales convergen.

   La primera integral converge por el criterio de equivalentes, ya que por la parte 2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2} = 1$.

   Además $F'(x) = 2xe^{-x^4} > 0$, entonces para todo $x > 0$ F es creciente en $[0, +\infty)$. Además $F(0) = 0$ y $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ es finito. Entonces, podemos deducir que existe $K > 0$ tal que $0 \leq F(x) \leq K$ para todo $x \in [0, +\infty)$

   Entonces:
   $$\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{K}{t^2}dt < +\infty.$$

Ejercicio 2.
(24 puntos)

1. Sea f continua, positiva y decreciente en $[1, +\infty)$ y $a_n = f(n)$.

a) Demuestre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge si y solo si $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Se tiene que, como f es decreciente, para $t \in [n, n+1]$, $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$, es decir $a_{n+1} \leq f(t) \leq a_n$. Si consideramos las funciones h y g, constantes en el intervalo $[n, n+1)$ que valen a_{n+1} y a_n respectivamente, tenemos que

$$\int_0^n h(t)dt \leq \int_0^n f(t)dt \leq \int_0^n g(t)dt,$$

de donde

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} \leq \int_0^n f(t)dt \leq \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

De lo anterior, como f positiva y $\int_1^x f(t)dt$ es creciente para toda $x > 1$ (de donde $\lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(t)dt$ para $n \in \mathbb{N}$) tenemos, tomando límite con $n \to \infty$, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge si y solo si $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} a_n$ converge.

b) Demuestre que en caso de convergencia se cumple además que

$$\int_1^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{i=1}^{+\infty} a_n \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(t)dt$$

De lo anterior, tenemos que en el caso de convergencia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \leq \int_0^{+\infty} f(t)dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n,$$

de donde la primera desigualdad es directa. Como

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n - f(1)$$

de la desigualdad

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \leq \int_0^{+\infty} f(t)dt$$

se deduce la segunda desigualdad.

c) Encuentre una función f positiva pero no monótona en $[1, +\infty)$ tal que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge y $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Consideremos la función $\operatorname{sen}(\pi x)$, entonces $a_n = f(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero $\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}(\pi x)dx$ no converge.

2. Sea $f(x) = x^2 e^{-x^3}$.

a) Pruebe que f es decreciente en $[1, +\infty)$.

$f'(x) = xe^{-x^3}(2 - 3x^2)$, de donde $f'(x) < 0$ en $[1, +\infty)$.

b) Demuestre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^3}$ converge y que $\displaystyle\frac{1}{3e} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^3} \leq \frac{4}{3e}$

Clasificamos $\int_1^{+\infty} x^2 e^{-x^3} dx$. $\lim_{y\to+\infty} \int_1^y x^2 e^{-x^3} dx = \lim_{y\to+\infty} -\frac{e^{-x^3}}{3}\Big|_1^y = \frac{1}{3e}$. Por las partes anteriores $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^3}$ converge y $\displaystyle\frac{1}{3e} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n^3} \leq \frac{1}{3e} + f(1) = \frac{1}{3e} + \frac{1}{e}$.

Ejercicio 3.
(16 puntos)

1. Sea f continua en $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ y $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.
   Demuestre que F es derivable en $\mathbb{R}$ y que $F'(x) = f(x)$.

   $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$, por aditividad respecto al intervalo $F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$, y por el teorema del valor medio $\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\bar{x})h$, donde $\bar{x}$ es un punto intermedio entre x y $x+h$. Luego
   $$\lim_{h\to+\infty} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to+\infty} f(\bar{x}) = f(x),$$
   de donde F es derivable en x y $F'(x) = f(x)$.

2. Sea $x(t)$ derivable en un intervalo I, sea $h(t) = \displaystyle\int_a^{x(t)} f(u)du$.
   Deduzca que h es derivable en I, calcule $h'(t)$.

   $h(t) = F(x(t))$. Por el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena $h'(t) = F'(x(t))x'(t)$.

3. Sea $f(u) = \dfrac{1}{u-1}$, halle $x(t)$ tal que $h'(t) = -t$, con $x(0) = 2$.
   Tenemos la ecuación
   $$\frac{x'(t)}{x(t) - 1} = -t$$
   con condición inicial $x(0) = 2$, la solución es
   $$x(t) = 1 + e^{-\frac{t^2}{2}}$$