Nicolás Casaballe, IF
ncasabal@fing.edu.uy
14 de febrero de 2007

Regímenes

Cortito y al pie: dado un sistema físico, el *REGIMEN PERMANENTE* es aquel que se alcanza cuando el tiempo transcurrido (t) desde el instante inicial ($t_0 = 0$) es mucho mayor que el tiempo característico del sistema. En una gran clase de problemas hay buenas razones para suponer que en este caso se ha alcanzado el *ESTADO ESTACIONARIO*: las cantidades físicas del sistema adquieren los mismos valores periódicamente, con una frecuencia bien definida – esto incluye la posibilidad de que dichos valores sean constantes.
El *REGIMEN TRANSITORIO* por otro lado es la etapa en que aún no se ha alcanzado el régimen permanente, lo que implica que se está observando el sistema para tiempos no muy grandes. En este estado suelen observarse grandes fluctuaciones de las cantidades físicas en observación, a veces en forma aleatoria. Sin embargo, en los sistemas disipativos las fluctuaciones se atenúan rapidamente cuando el tiempo es muy grande (al aproximarse al estado estacionario).

Estudio semi-formal de los regímenes

En general en un problema de circuitos eléctricos las leyes físicas nos conducen a ecuaciones diferenciales lineales:

$$F(t) - RI(t) - \frac{Q(t)}{C} - L\frac{dI}{dt} + \ldots = 0 \tag{1}$$

acompañadas de relaciones como $I(t) = \dot{Q}(t)$ y otras (la función incógnita será la corriente o la carga o alguna función de estas). La función $F(t)$ podría representar una fuente sinusoidal $F(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_0)$ por ejemplo.

Muchas veces en realidad se obtiene un sistema de tales ecuaciones, pero para simplificar la discusión supondremos una sola ecuación (los resultados para una ecuación se pueden generalizar a sistemas de ecuaciones como se ve en el curso de Ecuaciones Diferenciales).

Dada que la ecuación es lineal, se puede probar que la solución más general (para la incógnita de la ecuación) tiene la forma

$$S(t) = SH(t) + SP(t) \tag{2}$$

en donde $SH(t)$ es una solución general de la ecuación homogénea y $SP(t)$ es una solución particular.

La parte de la solución $SH(t)$ se encuentra tomando $F(t) = 0$ en la ecuación diferencial (de aquí que se llame *homogénea*: la eleccción $SH(t) = 0$ cumple la ecuación diferencial sin la fuente).

Al resolver la ecuación homogénea se encuentran habitualmente ciertas características:

- En la función $SH(t)$ estarán presentes exponenciales $e^{-t/\tau}$, donde τ es una constante que depende del sistema en estudio, y que por cierto es positiva en los casos de circuitos eléctricos (lo será en cualquier sistema disipativo).

- Por lo anterior, la situación general es que $SH(t)$ tiende exponencialmente a una constante – posiblemente 0 – cuando el tiempo tiende a infinito (más precisamente, cuando $t \gg \tau$; τ define entonces la escala de tiempo característica del sistema).

- $SH(t)$ es una solución *general*. Por ello, estará definida a menos de ciertas constantes arbitrarias, obtenidas probablemente por un proceso de integración. Estas constantes permiten ajustar la solución homogénea para que se cumplan las condiciones iniciales de la ecuación diferencial.

La parte de la solución $SP(t)$ se debe buscar reteniendo el valor de $F(t)$ en la ecuación diferencial. *Cualquier* función $SP(t)$ que verifique la ecuación es válida para construir la solución general $S(t) = SH(t) + SP(t)$.

- La solución $SP(t)$ depende de $F(t)$. Si la fuente es muy complicada, será un arduo trabajo determinar $SP(t)$. En cambio, si tenemos una fuente sencilla, encontrar una solución particular es casi trivial.
  Por ejemplo, si la fuente es sinusoidal $F(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_0)$, la solución también lo es: $SP(t) = A_0 \cos(\omega t + \phi)$. La dificultad de resolver la ecuación diferencial se transforma en la dificultad de determinar las constantes A_0 y ϕ.

- En la solución particular no hay ninguna constante arbitraria. Por tanto, no será posible lograr que las condiciones iniciales sean satisfechas excepto en casos triviales. Dicho de otro modo, $SP(t)$ “olvida” las condiciones iniciales.

- **Números complejos:** en el caso de una *fuente sinusoidal* $F(t) = V_0 \cos(\omega t)$ se puede introducir una función compleja $V(t) = V_0 e^{j\omega t}$ cuya parte real es el valor de $F(t)$

  $$F(t) = Re[V(t)] = Re[V_0(\cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t)] \tag{3}$$

  Puesto que la operación de tomar la parte real es *lineal*, podemos resolver el problema asignando primero una función compleja con la misma dependencia temporal $e^{j\omega t}$ a cada una de las funciones incógnita de la ecuación, y una vez determinadas las funciones complejas tomar su parte real para conocer el valor físico de las magnitudes correspondientes.
  La ventaja de proceder de esta manera es que las propiedades de la exponencial compleja son más sencillas de aprovechar que las correspondientes de las funciones trigonométricas que se usarían si deseásemos resolver el problema con variables reales únicamente.

- En el caso de que $F(t)$ no es sinusoidal, NO es válido el tratamiento previo[1].

Una vez que hemos disectado el problema original, podemos distinguir dos situaciones "extremas" interesantes:

1. **Tiempos grandes o Régimen Permanente** Cuando el tiempo t es muy grande en comparación con el tiempo característico del sistema, la solución $SH(t)$ se ha estabilizado: su valor es *constante*: no hay ninguna medición posible que pueda detectar una variación en esta cantidad.
   Si no tenemos una fuente $F(t)$, entonces la incógnita para la que se resolvió el problema adquirió un valor constante que depende de las condiciones iniciales (observar que este valor puede ser nulo o no; por otro lado las derivadas de esta función se anulan en todo punto).
   Si en cambio hay una fuente $F(t)$ sinusoidal, podemos aseverar que solo la solución particular $SP(t)$ sobrevive para tiempos largos (la parte homogénea decae exponencialmente). Todas las cantidades tienen la misma dependencia temporal sinusoidal a menos de sus distintas fases; no hay rastros de las condiciones iniciales. Decimos que la fuente o excitación $F(t)$ ha impuesto su frecuencia en el sistema[2] .
   Un ejemplo recurrente es una fuente que adquiere dos valores constantes en forma periódica. ¿Es una fuente sinusoidal? No. ¿Tiene sentido preocuparse del régimen permanente? Sí, consiste en investigar qué ocurre para tiempos muy largos. Pero en este caso el estudio no corresponde a la situación anterior; una forma de abordar el problema es estudiar el comportamiento del sistema en un ciclo cualquiera.

2. **Tiempos "no largos" o Régimen Transitorio** Si nos interesan los tiempos no muy largos en comparación con el tiempo característico del sistema, hay que tomar en cuenta la solución completa del sistema, $S(t) = SH(t) + SP(t)$. Tendremos habitualmente una dependencia exponencial dada por $SH(t)$, y un factor que depende de la fuente dado por $SP(t)$. Las condiciones iniciales juegan un papel importante en esta situación, fijando las constantes de la solución general $SH(t)$.
   Nuevamente, si la fuente $F(t)$ es arbitraria la dificultad matemática para determinar $SP(t)$ es considerable; casos sencillos son aquellos en que $F(t)$ es constante o sinusoidal.

Buen provecho!
De acuerdo a la recepción de este texto, posiblemente realice una pequeña ampliación que incluya un ejemplo y algún comentario introductorio más.

[1] sin embargo, la linealidad permite extender el caso sinusoidal a casos generales a través del análisis de Fourier; básicamente hay que usar el principio de superposición pero la operatoria es bastante sofisticada, sobre todo para fuentes no periódicas

[2] A un sistema dado algunas frecuencias particulares impuestas le resultarán más "simpáticas" que otras, por ejemplo su *frecuencia natural*. Un sistema ofrece cierta resistencia a ser excitado con una frecuencia muy diferente de su frecuencia natural.