

Segundo Parcial de Electromagnetismo, 2008. Solución

Ejercicio 1

a) Utilizando el potencial escalar magnético para un dipolo estático

$$\varphi^*(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

la inducción magnética es $\vec{B}(\vec{r}) = -\mu_0 \nabla \varphi^*(\vec{r})$. Usando las reglas

- $\nabla(f(\vec{r})g(\vec{r})) = (\nabla f(\vec{r}))g(\vec{r}) + f(\vec{r})(\nabla g(\vec{r}))$, siendo f y g funciones escalares
- $\nabla(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}$, siendo \vec{a} un vector constante
- $\nabla(f(r)) = f'(r) \frac{\vec{r}}{r}$, donde f es una función que depende sólo de $r = |\vec{r}|$ y f' su derivada.

se encuentra

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right]$$

Por ejemplo, en coordenadas esféricas, con el eje principal en la dirección de \vec{m} , queda (el sistema posee simetría de revolución alrededor del eje y por ello no depende del ángulo ϕ):

$$\vec{B}(r, \theta) = -\mu_0 \left[-\frac{1}{2\pi} \frac{m \cos \theta}{r^3} \hat{e}_r - \frac{1}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \hat{e}_\theta \right] = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} [2 \cos \theta \hat{e}_r + \sin \theta \hat{e}_\theta]$$

b) En la figura se bosquejan las líneas de inducción magnética correspondientes al campo.

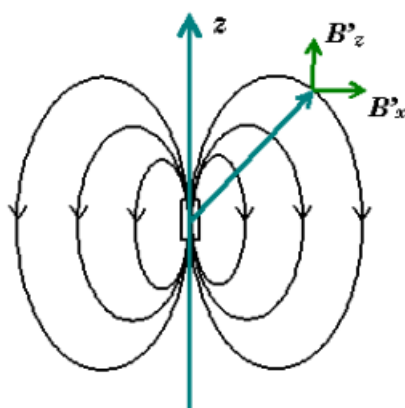
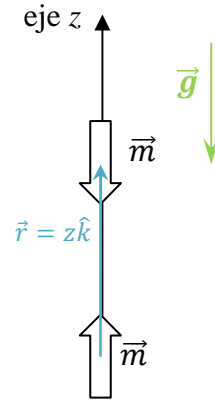


Figura 1: Líneas de campo de un dipolo. El eje z se tomó coincidente con la dirección de \vec{m} .

c) De acuerdo a la letra ambos imanes se consideran como dipolos magnéticos paralelos a la varilla. Notemos que para la suspensión del imán superior, es necesario que los dipolos magnéticos \vec{m} estén colocados en sentido opuesto entre ellos. Elijamos un sistema de coordenadas con el origen en el dipolo inferior, y consideraremos el caso en que su momento apunta hacia arriba. Usemos un eje vertical orientado hacia arriba como el eje z . Para poder flotar, el imán superior debe tener su momento dipolar hacia las z negativas.



La inducción magnética producida por el imán inferior en el eje z se obtiene tomando la solución de la parte (a) con $\vec{r} = z\hat{k}$,

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3} \hat{k}$$

La energía potencial del imán superior en presencia de este campo es:

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -(-m\hat{k}) \cdot \left(\frac{\mu_0 m}{2\pi z^3} \hat{k}\right) = \frac{\mu_0 m^2}{2\pi z^3}$$

de manera que la fuerza del imán inferior sobre el superior es

$$F_z = -\frac{dU}{dz} = \frac{3\mu_0 m^2}{2\pi z^4}$$

(para usar la relación entre la fuerza y la energía hemos considerado la energía del dipolo superior suponiendo que el inferior se mantiene fijo).

La fuerza está dirigida en el sentido positivo del eje, es decir, hacia arriba. En la posición de equilibrio $z = h$, la fuerza magnética debe ser opuesta al peso. Igualando los módulos $\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi h^4} = M_0 g$, podemos despejar la posición de equilibrio:

$$h = \left(\frac{3\mu_0 m^2}{2\pi M_0 g}\right)^{\frac{1}{4}}$$

d) La presencia de la varilla es necesaria porque el equilibrio es inestable ante las rotaciones del momento \vec{m} . Esto se desprende de inmediatamente de la expresión de la energía $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$. Para una separación entre los dipolos fija, la configuración con el dipolo superior hacia abajo corresponde en este caso a un *máximo* de la energía potencial y por lo tanto es inestable. La configuración de *mínima* energía es aquella con los dipolos orientados paralelamente.

Alternativamente, se puede obtener la misma conclusión si consideramos que los dipolos no son perfectamente puntuales y poseen un ‘polo norte’ y un ‘polo sur’ (en el límite en el que el dipolo se toma puntual, el momento \vec{m} va de sur a norte). Los polos iguales se repelen y los opuestos se atraen. La configuración con los momentos antiparalelos es inestable.



orientación estable ante rotaciones

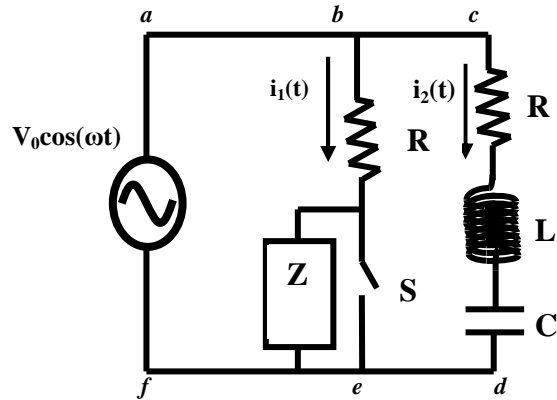


orientación inestable ante rotaciones

Ejercicio 2

a) Trabajamos con cantidades complejas definidas por

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \text{Re}[\hat{I}_1 e^{j\omega t}] \\ i_2(t) &= \text{Re}[\hat{I}_2 e^{j\omega t}] \\ i(t) &= i_1(t) + i_2(t) = \text{Re}[\hat{I} e^{j\omega t}] \\ v(t) &= V_0 \cos(\omega t) = \text{Re}[\hat{V} e^{j\omega t}] \end{aligned}$$



La última relación implica $\hat{V} = V_0$.

Usando leyes de mallas entre *abefa* (cuando la llave *S* está cerrada, sus extremos están al mismo potencial) y *acdfa*, considerando el estado de régimen, encontramos

$$V_0 - R\hat{I}_1 = 0 \quad \text{y} \quad V_0 - R\hat{I}_2 - j\omega L\hat{I}_2 - \frac{1}{j\omega C}\hat{I}_2 = 0$$

de lo que se despejan

$$\hat{I}_1 = \frac{V_0}{R}, \quad \hat{I}_2 = \frac{V_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{V_0 e^{j\varphi_2}}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)\right]^2}}$$

donde $\varphi_2 = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\omega RC} - \frac{\omega L}{R}\right)$. A partir de las amplitudes complejas, encontramos que las corrientes son

$$\boxed{i_1(t) = \frac{V_0}{R} \cos(\omega t)} \quad \boxed{i_2(t) = \frac{V_0 \cos(\omega t + \varphi_2)}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)\right]^2}}$$

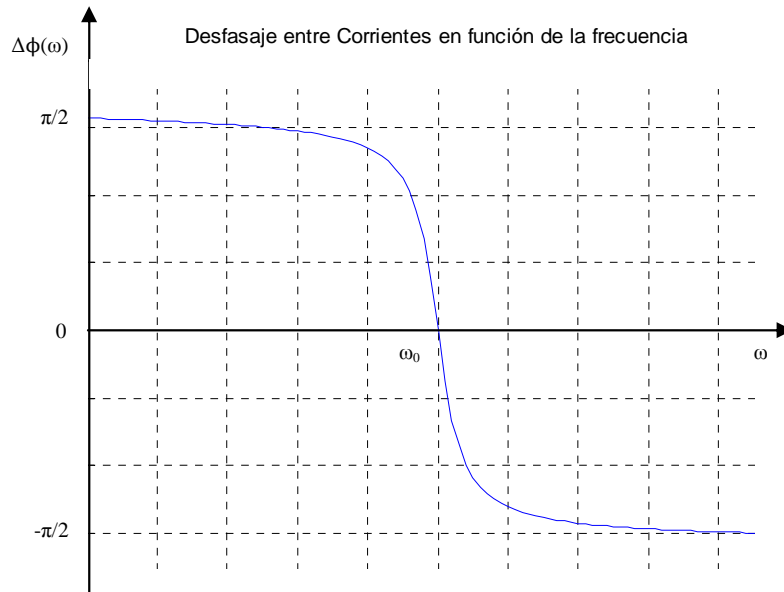
La frecuencia de resonancia es $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, ya que la amplitud de $i_2(t)$ se maximiza para esta frecuencia (se puede ver fácilmente que el denominador en la expresión de la amplitud se minimiza para ω_0).

b) Tomamos la diferencia de fases como $\Delta\varphi(\omega) = \varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega)$. La corriente i_1 está en fase con la fuente (la que fija la fase de referencia) por lo que $\varphi_1(\omega) = 0$.

De la expresión resultante para la diferencia de fases destacamos tres casos importantes:

- Si $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ entonces $\Delta\varphi(\omega_0) = 0$
- Cuando la frecuencia tiende a cero, $\omega \ll \omega_0$, la diferencia de fases tiende a $\pi/2$.
- Cuando la frecuencia es muy grande, $\omega \gg \omega_0$, la diferencia de fases tiende a $-\pi/2$.

El bosquejo tiene el aspecto mostrado en la figura.



c) Al cerrar la llave S, sólo cambia la ecuación de la malla *abefa* de la parte (a). Como la corriente i_1 pasa por Z,

$$V_0 - R\hat{I}_1 - Z\hat{I}_1 = 0$$

Trabajando a la frecuencia $\omega = 2\omega_0$ la impedancia inductiva es mayor en módulo que la impedancia capacitiva en el RLC serie (rama *cd*), por lo que decimos que este circuito se vuelve inductivo. Colocando un inductor en la caja, $Z = L_Z$, hacemos que la impedancia en la rama *be* sea también inductiva, verificándose:

$$\hat{I}_1 = \frac{V_0}{R + j2\omega_0 L_Z}, \quad \hat{I}_2 = \frac{V_0}{R + j\omega L(1 - \frac{1}{\omega^2 LC})} = \frac{V_0}{R + j\frac{3}{2}\omega_0 L}$$

(usando $\omega^2 = (2\omega_0)^2 = 4/LC$).

Las fases de las corrientes cumplen, respectivamente,

$$\tan \varphi_1 = -2 \frac{\omega_0 L_Z}{R}, \quad \tan \varphi_2 = -\frac{3 \omega_0 L}{2 R}$$

(en efecto, el *signo* de estas relaciones confirma que Z debe ser un inductor). Entonces, para que las corrientes no estén desfasadas entre sí, el valor de L_Z debe ser $L_Z = 3L/4$

d) La corriente está dada por

$$\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 = \frac{V_0}{R + j\omega L_Z} + \frac{V_0}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \stackrel{\omega = \omega_0}{=} \frac{V_0}{R + j\omega_0 L_Z} + \frac{V_0}{R}$$

y la potencia media es

$$P = \frac{1}{2} \text{Re}\{\hat{V}\hat{I}^*\} = \frac{1}{2} \text{Re}\left\{\frac{V_0^2}{R - j\omega_0 L_Z} + \frac{V_0^2}{R}\right\}$$

Usando

que

$$\frac{1}{R - j\omega_0 L_Z} = \frac{R + j\omega_0 L_Z}{R^2 + \omega_0^2 L_Z^2}$$

y sustituyendo $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, la potencia media es

$$\Rightarrow P = \frac{V_0^2}{2} \left(\frac{R}{R^2 + \omega_0^2 L_Z^2} + \frac{1}{R} \right) = \frac{V_0^2}{2R} \left(\frac{2R^2 + \frac{9L}{16C}}{R^2 + \frac{9L}{16C}} \right)$$

Obs.: En forma equivalente se podría poner

$$P = \frac{1}{2} |\hat{V}| |\hat{I}| \cos(\phi) = \frac{V_0^2}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{R^2 + \omega_0^2 L_Z^2} + \frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{\omega_0 L_Z}{R^2 + \omega_0^2 L_Z^2} \right)^2} \cos(\phi)$$

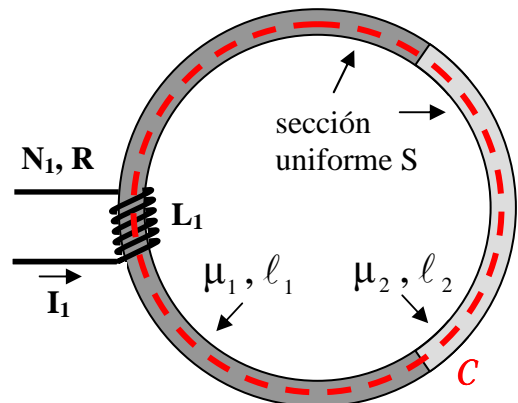
con

$$\phi = \text{Arctan} \left[\frac{\omega_0 L_Z}{\left(\frac{R}{R^2 + \omega_0^2 L_Z^2} + \frac{1}{R} \right)} \right]$$

¿Qué alternativa es mejor?; Usted decide!

Ejercicio 3

a) Para calcular la autoinductancia L_1 , consideremos una corriente I_1 que pasa por este enrollado y luego aplicamos Ampère en la curva cerrada C como se muestra en la figura, recorriéndola en sentido horario:



$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_1 I_1 \rightarrow H_1 l_1 + H_2 l_2 = N_1 I_1$$

donde para la integral utilizamos que el campo B es el mismo en todo el material ($B_1 = B_2 = B$), dado que el flujo magnético Φ_B se conserva, la sección S es uniforme y a que las permeabilidades de los materiales son muy grandes en comparación con la del vacío. Como los materiales son lineales,

$$H_1 = \frac{B}{\mu_1} \text{ y } H_2 = \frac{B}{\mu_2}, \text{ lo que permite efectuar la integración.}$$

Sustituyendo en la ecuación de Ampère:

$$B \left(\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{l_2}{\mu_2} \right) = N_1 I_1 \rightarrow B = \frac{N_1 I_1}{\left(\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{l_2}{\mu_2} \right)}$$

La autoinducción es

$$L_1 = N_1 \frac{d\Phi_B}{dI_1} = N_1 \frac{d(BS)}{dI_1} = \frac{N_1^2 S}{\left(\frac{\ell_1}{\mu_1} + \frac{\ell_2}{\mu_2}\right)} = \frac{N_1^2 S \mu_1 \mu_2}{\mu_2 \ell_1 + \mu_1 \ell_2}$$

b) Una vez cerrada la llave y alcanzado el estado estacionario la corriente I_1 tiene un valor constante. El flujo magnético no varía con el tiempo y no aparece una *fem* por variación de flujo. Entonces en el estado estacionario $I_1 = V_0 / R$ y la potencia disipada es $P = V_0 I_1 = V_0^2 / R$

c) Debido a la presencia del inductor L_1 , no hay un cambio abrupto de la corriente; inmediatamente luego de cerrar la llave, la corriente debe tener el mismo valor que inmediatamente antes. Como la corriente antes de cerrar la llave es cero, entonces éste es el valor inmediatamente luego de cerrar la llave: $I_1(0) = 0$

Sustituyendo en la ecuación del circuito:

$$V_0 - RI_1(t) - L_1 \frac{dI_1}{dt}(t) = 0 \rightarrow \left. \frac{dI_1}{dt}(t) \right|_{t=0} = \frac{V_0}{L}$$

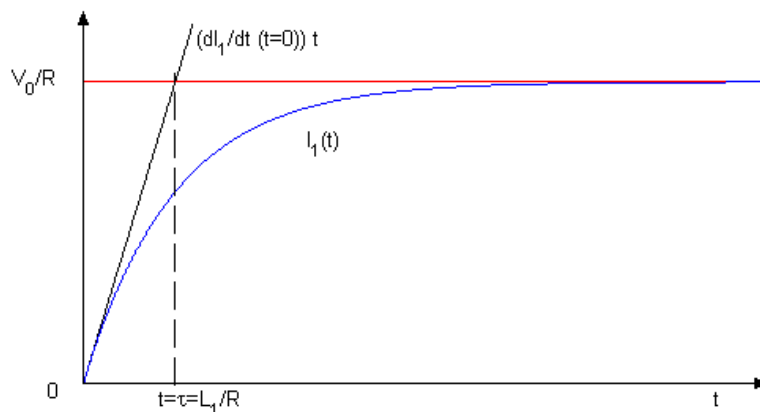
d) Resolvemos la ecuación del circuito

$$V_0 - RI_1(t) - L_1 \frac{dI_1}{dt}(t) = 0.$$

La solución general de esta ecuación diferencial es $I_1(t) = Ae^{-(R/L_1)t} + \frac{V_0}{R}$, donde A es una constante con dimensiones de corriente. Con la condición inicial $I_1(0)=0$, despejamos $A = -V_0 / R$. Entonces:

$$I_1(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-(R/L_1)t})$$

Para el tiempo $t = \tau = L_1/R$, I_1 alcanza aproximadamente el 63% de su valor final V_0 / R . De aquí que una posible estimación del tiempo necesario para alcanzar el estado estacionario esté dada por el tiempo característico τ (a menos de factores de orden unidad).



e) Al conectar un voltímetro, la diferencia de potencial entre los extremos A y B del segundo bobinado se debe al cambio en el flujo magnético a través de éste. Este cambio se debe a su vez al cambio en la corriente I_1 que circula por L_1 (la gran resistencia del voltímetro hace que la corriente por este bobinado sea despreciable).

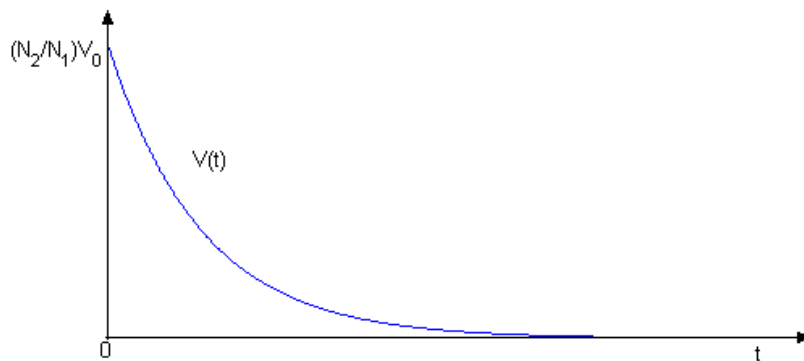
A partir de la ley de Lenz y el sentido en que está enrollado el segundo bobinado se ve que, como el campo B aumenta con el tiempo, $V_B - V_A > 0$.

$$V(t) = V_B - V_A = \left| N_2 \frac{d\Phi_B}{dt} \right|$$

y $\Phi_B \cong BS = \frac{L_1 I_1(t)}{N_1}$, donde usamos los resultados de la parte (a) para dejar B en función de L_1 .

Usando $I_1(t)$, hallado en (d):

$$V(t) = N_2 \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{N_2}{N_1} L_1 \frac{dI_1}{dt} = \boxed{\frac{N_2}{N_1} V_0 e^{-(R/L_1)t}}$$



El signo de la diferencia de potencial depende de que

- la corriente por L_1 está aumentando,
- y el sentido en que están enrollados los alambres.

Si alguno de los anteriores se invierte, también lo hace el signo de $d\Phi_B/dt$ y por lo tanto el signo de $V(t)$.