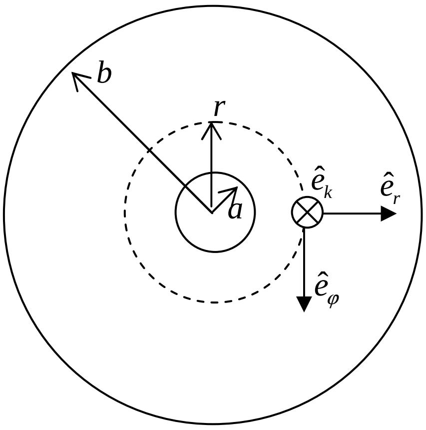
# Electromagnetismo
# Curso 2007
# Segundo parcial – Solución -

**Problema Nº1**




*visto desde la batería*

**a)** Sean $\hat{e}_r, \hat{e}_k$ y $\hat{e}_\varphi$ con $\hat{e}_r \wedge \hat{e}_\varphi = \hat{e}_k$ según la figura. Dada la simetría del cable coaxial y la forma en que está conectada la batería, $\vec{E} = E(r)\hat{e}_r$ y $\vec{B} = B(r)\hat{e}_\varphi$.

A partir de la *ley de Gauss* aplicada a una superficie cilíndrica de radio r y largo L se tiene: $E(r)2\pi rL = q/\varepsilon_0$, siendo $q$ la carga en el cilindro de radio $a$. La diferencia de potencial entre el cilindro interior ($a$) y exterior ($b$) es:

$$V = V(a) - V(b) = -\int \vec{E}.d\vec{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$\Rightarrow q = 2\pi\varepsilon_0 LV \Big/ \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ y el *campo eléctrico* resulta: $\boxed{\vec{E}(r) = \frac{V}{ln(b/a)r}\hat{e}_r}$

El *campo magnético* lo podemos hallar aplicando la *ley de Ampère* a un anillo de radio $r$ ($a<r<b$), que encierra la corriente $i$ $(V - Ri = 0 \rightarrow i = V/R)$ que circula por el cilindro de radio $a$: $B(r)2\pi r = \mu_0 i = \mu_0 \frac{V}{R} \Rightarrow \boxed{\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{V}{R}\hat{e}_\varphi}$

**b)** Densidad de energía electromagnética: $u_{EM} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}.\vec{D} + \vec{B}.\vec{H}\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)$

Integrándola en el volumen interior ($a<r<b$) del cable coaxial tenemos:

$$U_{EM} = \int_{Vol} u_{EM}dv = \int_a^b u_{EM}\, 2\pi Lrdr \Rightarrow \boxed{U_{EM} = \pi LV^2\left[\frac{\varepsilon_0}{\ln^2(b/a)} + \frac{\mu_0}{4\pi^2 R^2}\right]\ln(b/a)}$$

**c)** $\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{V^2}{2\pi\ln(b/a)r^2 R}\left(\hat{e}_r \wedge \hat{e}_\varphi\right) \Rightarrow \boxed{\vec{S} = \frac{V^2}{2\pi\ln(b/a)r^2 R}\hat{e}_k}$

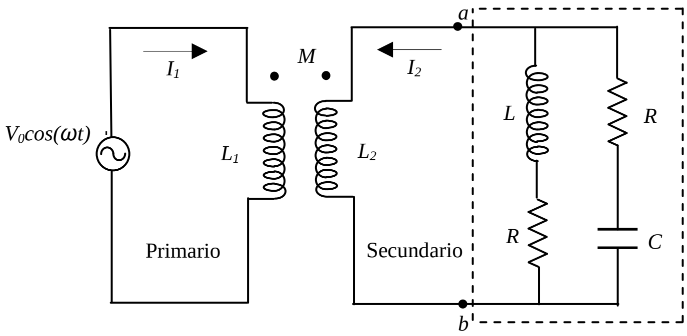
**d)** Si se toma $\hat{n} = \hat{e}_k$: $P = \int \vec{S}.\hat{e}_k \quad da = \int_a^{r_0} S(r)2\pi rdr \Rightarrow \boxed{P = \frac{V^2}{R}\frac{\ln(r_0/a)}{\ln(b/a)}}$

**e)** Para $r_0 = b$, $\boxed{P = V^2/R}$. Luego la potencia entregada por la fuente $\left(Vi = V\left(V/R\right) = V^2/R = P\right)$ es igual al flujo del vector de Poynting a través de la sección transversal anular (a<r<b) y a su vez a la potencia disipada en la resistencia. Puesto de otro modo, la tasa a la que la batería entrega energía es la misma que la disipada por el resistor (conservación de la energía).

**f)** Conectar la batería con su polaridad invertida implica que tanto $\vec{E}$ como $\vec{B}$ invierten sus sentidos, de modo que su producto vectorial ($\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$) permanece inalterado. La energía siempre fluye desde la batería hacia la resistencia y por lo tanto es razonable que el vector de Poynting apunte en ese sentido independientemente de cómo se conecte la batería. El resultado de e) se mantiene incambiado.

## Problema 2

**a)** Usando resultados de equivalencias en serie y en paralelo para las impedancias, se obtiene:



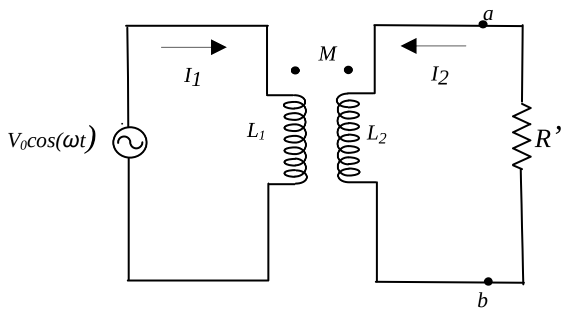

$$Z_{eq} = \frac{(j\omega L + R)(R + 1/j\omega C)}{2R + j(\omega L - 1/\omega C)} \Rightarrow$$

$$\boxed{Z_{eq} = \frac{R^2 + L/C + jR(\omega L - 1/\omega C)}{2R + j(\omega L - 1/\omega C)}}$$

**b)** Sea $V$ el voltaje entre los bornes $a$ y $b$. Se verifica $V = Z_{eq} I_2$. Para que $V, I_2$ estén en fase $Z_{eq}$ debe ser necesariamente un real. El problema se reduce a hallar una frecuencia de trabajo $\omega_0$ que lo imponga.

$$Si \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \quad \Rightarrow \boxed{Z_{eq}(\omega_0) = \frac{R^2 + L/C}{2R}}$$

**c)** La frecuencia de trabajo es $\omega_0$, donde $Z_{eq}$ tiene un comportamiento puramente resistivo, por lo que defino $Z_{eq}(\omega_0) = R'$.




Las ecuaciones del circuito resultan:

$$\begin{cases} V_0 = j\omega_0 L_1 I_1 + j\omega_0 M I_2 \\ 0 = j\omega_0 L_2 I_2 + j\omega_0 M I_1 + R' I_2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema y utilizando que $M^2 = L_1 \times L_2$ se verifica:

$$I_1 = \frac{R' + j\omega_0 L_2}{j\omega_0 L_1 R'} V_0 = \frac{\sqrt{R'^2 + (\omega_0 L_2)^2}}{\omega_0 L_1 R'} e^{-j\theta} V_0 \quad con \quad \theta = Arctg\left(\frac{R'}{\omega_0 L_2}\right)$$

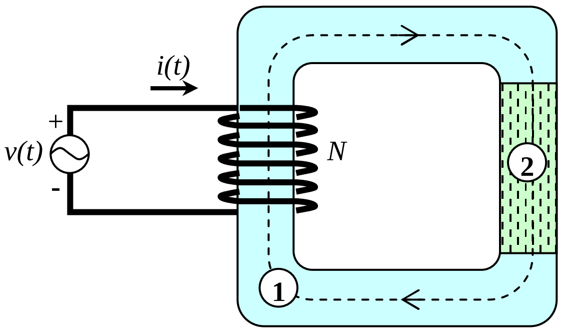
$$\boxed{i_1(t) = \frac{\sqrt{R'^2 + (\omega_0 L_2)^2}}{\omega_0 L_1 R'} V_0 \cos(\omega_0 t - \theta)}$$

**d)** La potencia que entrega la fuente es el producto del voltaje en sus bornes por la corriente que circula por ésta. Luego basta con promediar en un período

$$\bar{P}=\frac{1}{T}\int_0^T V_o\cos(\omega t)I_1\cos(\omega t-\theta)dt=\frac{V_oI_1}{2}\cos(\theta)=\frac{\sqrt{R'^2+(\omega L_2)^2}}{2\omega L_1R'}V_0^2\cos(\theta)$$

$$donde\quad \cos(\theta)=\frac{\mathrm{Re}(I_1)}{|I_1|}=\frac{L_2/L_1R'}{\left(\frac{\sqrt{R'^2+(\omega L_2)^2}}{\omega L_1R'}\right)}\qquad \Rightarrow \boxed{\bar{P}=\frac{V_0^2L_2}{2L_1R'}}$$

**Problema Nº3**




**a)** Aplicando la ley de Ampère a la curva de la figura, se encuentra $\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=Ni$. La integral de circulación de **H** puede dividirse en integraciones en cada sustancia. Si consideramos que el campo es esencialmente constante a lo largo de la trayectoria y paralelo a la trayectoria, queda

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\int_{(1)}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}+\int_{(2)}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}\simeq H_1l_1+H_2l_2 \qquad (1)$$

Cuando el comportamiento de las sustancias es lineal, se cumple $H_1=\frac{B_1}{\mu_1},\ H_2=\frac{B_2}{\mu_2}$. (2)

El flujo de campo magnético es *continuo* ($\nabla\cdot\mathbf{B}=0$) por lo que tenemos $B_1=B_2=B$ (3)

Usando estos resultados en la circulación de **H** e igualando el resultado a *Ni*, se despejan los valores del campo

$$\boxed{B=\frac{Ni}{l_1/\mu_1+l_2/\mu_2}},\ H_1=\frac{Ni}{l_1+l_2\,\mu_1/\mu_2},\ H_2=\frac{Ni}{l_1\,\mu_2/\mu_1+l_2}\ \text{(lineal)} \qquad (4)$$

**b)** La sustancia 2 permanece sin saturarse si $H_2\le H_S$. En términos de la corriente, esta condición queda

$$i\le i_S\ \text{con}\ \boxed{i_S\equiv\frac{H_S}{N}(l_1\,\mu_2/\mu_1+l_2)} \qquad (5)$$

Cuando $i>i_S$, el cambio respecto a la parte anterior es que el campo en la sustancia saturada está dado por $B_2=\mu_0(H_2+M_S)$. Repitiendo el razonamiento se llega en este caso a

$$\boxed{B=\frac{Ni+M_Sl_2}{l_1/\mu_1+l_2/\mu_0}},\ H_1=\frac{Ni+M_Sl_2}{l_1+l_2\,\mu_1/\mu_0},\ H_2=\frac{Ni+M_Sl_2}{l_1\,\mu_0/\mu_1+l_2}+M_S \qquad (6)$$

**c)** El flujo por la bobina es

$$\Phi_B = NAB = \begin{cases} \dfrac{AN^2}{l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2} i, & i < i_S \\ \dfrac{AN^2 i + ANM_S l_2}{l_1/\mu_1 + l_2/\mu_0}, & i > i_S \end{cases} \tag{7}$$

La f.e.m. inducida en la bobina por variaciones en la corriente es

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \begin{cases} -\dfrac{AN^2}{l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2}\dfrac{di}{dt}, & i < i_S \\ -\dfrac{AN^2}{l_1/\mu_1 + l_2/\mu_0}\dfrac{di}{dt}, & i > i_S \end{cases}} \tag{8}$$

La autoinducción se desprende de $\dfrac{d\Phi_B}{dt} = \dfrac{d\Phi_B}{di}\dfrac{di}{dt} = L\dfrac{di}{dt}$, por lo que de lo anterior se deduce

$$L_l = \frac{AN^2}{l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2} \text{ (lineal)}, \quad L_S = \frac{AN^2}{l_1/\mu_1 + l_2/\mu_0} \text{ (sat.)} \tag{9}$$

**d)** Para el circuito con la fuente se cumple la ecuación (Kirchoff): $v(t) = L\dfrac{di}{dt}$ (10)

Integrando $v(t) = \lambda t$ entre $t = t_0$ y $t = t_F$, asumiendo que $L$ no cambia durante ese lapso, queda

$$i(t_F) - i(t_0) = \frac{\lambda}{2L}(t_F^2 - t_0^2) \tag{11}$$

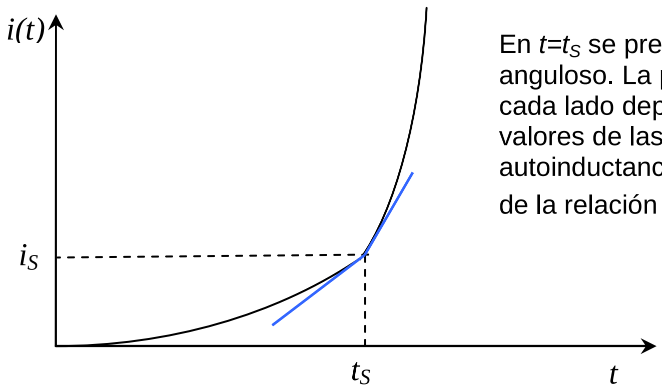
Al comienzo ($t_0 = 0$) la sustancia no está saturada, $L = L_l$, y la corriente queda entonces

$$\boxed{i(t) = \frac{\lambda}{2L_l}t^2} \quad \text{(para } t < t_S\text{)} \tag{12}$$

La corriente crece hasta que en el instante $t_S = \sqrt{2L_l i_S/\lambda}$ alcanza el valor de saturación $i_S$.

A partir de entonces, con $L = L_S$, se encuentra $\boxed{i(t) = i_S + \dfrac{\lambda}{2L_S}\left(t^2 - {t_S}^2\right)}$ (para $t > t_S$)

(13)




En $t=t_S$ se presenta un punto anguloso. La pendiente a cada lado depende de los valores de las autoinductancias (en particular de la relación entre $\mu_2$ y $\mu_0$).