Instituto de Física – Facultad de Ingeniería

Soluciones del segundo parcial de Electromagnetismo - 2006

Problema 1

a) Aplicando Kirchoff: $\sum_i \Delta V_i = V - RI(t) - \dfrac{Q(t)}{C} = 0$.

Sustituyendo $I(t) = \dfrac{dQ(t)}{dt}$ queda

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{V}{R} - \frac{Q(t)}{RC} = \frac{1}{RC}\left(VC - Q(t)\right)$$

La ecuación se puede resolver por separación de variables:

$$\frac{dQ}{Q - VC} = -\frac{dt}{RC} \xrightarrow[\text{entre } t_0 \text{ y } t]{\text{integrando}} \log\left(\frac{Q(t) - VC}{Q(t_0) - VC}\right) = -\frac{(t - t_0)}{RC}$$

De aquí se despeja la carga:

$$\boxed{Q(t) = VC + \left(Q(t_0) - VC\right)e^{-\frac{1}{RC}(t - t_0)}}$$

b) Sea $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ el tiempo de una revolución.

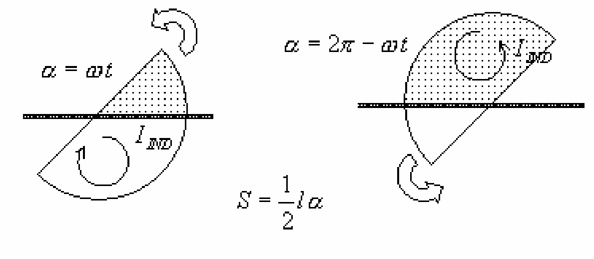
El campo magnético es uniforme y normal a la superficie de la espira. El flujo por lo tanto es igual al módulo del campo por la superficie que queda en la zona $y > 0$.

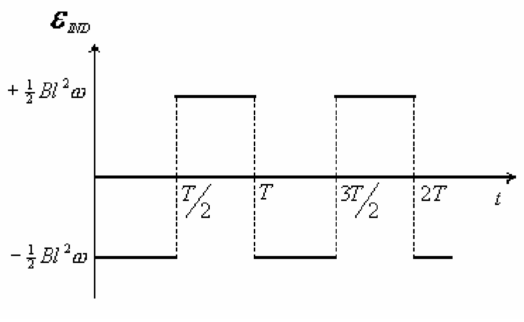
$$\Phi_B(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} Bl^2 \omega t & 0 \le t \le T/2 \\ \frac{1}{2} Bl^2 (2\pi - \omega t) & T/2 \le t \le T \end{cases}$$ (ver figura)

Usando la ley de Faraday, la fuerza electromotriz es

$$\varepsilon_{IND} = -\frac{d\Phi_B}{dt}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} Bl^2 \omega & 0 \le t \le T/2 \\ +\frac{1}{2} Bl^2 \omega & T/2 \le t \le T \end{cases}$$

Cuando la espira está entrando la corriente inducida es antihoraria y cuando la espira está saliendo es horaria.





c) Usando el resultado de la parte (*a*) entre $t_0 = 0$ y $t = T/2$ con $V = -\frac{1}{2}Bl^2\omega$ se tiene[1]

$$Q^{(e)}(t) = -\tfrac{1}{2}Bl^2\omega C + \left(Q_0 + \tfrac{1}{2}Bl^2\omega C\right)e^{-t/RC}$$

La carga en $t = T/2$ vale

$$Q^{(e)}\left(T/2\right) = -\tfrac{1}{2}Bl^2\omega C\left(1 - e^{-T/2RC}\right) + Q_0 e^{-T/2RC} \equiv Q_1 .$$

Aplicando otra vez el resultado de la parte (*a*), entre $t_0 = T/2$ y $t = T$ con $Q^{(s)}(t_0) = Q_1$ y $V = +\frac{1}{2}Bl^2\omega$ se llega a la carga del condensador cuando $t = T$:

$$\boxed{Q^{(s)}(T) = \tfrac{1}{2}Bl^2\omega C\left(1 + e^{-T/RC} - 2e^{-T/2RC}\right) + Q_0 e^{-T/RC}}$$

d) Cuando el circuito esta en régimen permanente ($t \to \infty$) todas las cantidades tienen el mismo período T. En particular, la carga al final de cada vuelta debe coincidir con el valor que posee al comenzar un ciclo (en forma equivalente, las condiciones iniciales se tienen que repetir para que se produzca la misma evolución en cargas, corrientes, etc.). Entonces,

$$Q^{(e)}(t = 0) = Q^{(s)}(t = T)$$

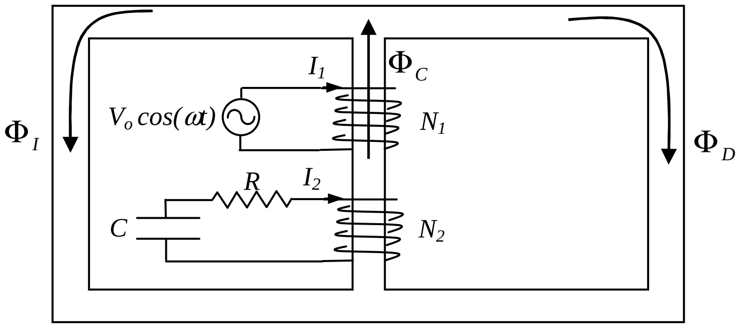
Igualando el resultado de (c) a Q_0 y despejando, queda:

$$\boxed{Q_0 = \frac{Bl^2\omega C}{2}\left(\frac{1 - 2e^{-T/2RC} + e^{-T/RC}}{1 - e^{-T/RC}}\right) = \frac{Bl^2\omega C}{2}\left(\frac{1 - e^{-T/2RC}}{1 + e^{-T/2RC}}\right)}$$

[1] El superíndice *e* es porque está entrando; el superíndice *s* indica que está saliendo.

Problema 2

a) Por simetría: $\Phi_I = \Phi_D = \dfrac{\Phi_C}{2}$



Tomando una curva cerrada que pase por la rama central y cualquiera de las laterales:

$$\frac{l}{\mu S}\Phi_C + \frac{3l}{\mu S}\frac{\Phi_C}{2} = N_1 I_1 + N_2 I_2 \quad \Rightarrow \; \Phi_C = \frac{2}{5}\frac{\mu S}{l}(N_1 I_1 + N_2 I_2)$$

$$\therefore \quad \boxed{L_1 = \frac{d(N_1\Phi_C)}{dI_1} = \frac{2}{5}\frac{\mu S}{l}N_1^2} \quad \boxed{L_2 = \frac{d(N_2\Phi_C)}{dI_2} = \frac{2}{5}\frac{\mu S}{l}N_2^2} \quad \boxed{M = \frac{d(N_2\Phi_C)}{dI_1} = \frac{2}{5}\frac{\mu S}{l}N_1 N_2}$$

b) La tensión en la fuente es: $v(t) = V_0 \cos(\omega t) = \mathrm{Re}[V_0 e^{j\omega t}]$, en régimen será:

$$\begin{cases} i_1(t) = \mathrm{Re}[I_1 e^{j\omega t}] \\ i_2(t) = \mathrm{Re}[I_2 e^{j\omega t}] \end{cases}$$

Con los sentidos de I_1 e I_2 de la figura: $\begin{cases} V_0 - j\omega L_1 I_1 - j\omega M I_2 = 0 \\ -\dfrac{I_2}{j\omega C} - RI_2 - j\omega L_2 I_2 - j\omega M I_1 = 0 \end{cases}$

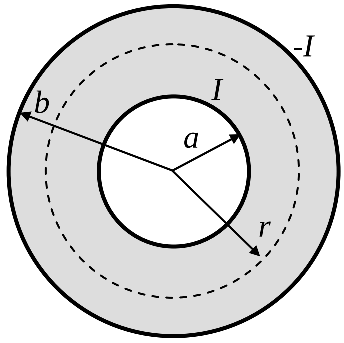
De la segunda ecuación: $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{\dfrac{1}{j\omega C} + j\omega L_2 + R}{-j\omega M} = \dfrac{(1-\omega^2 L_2 C) + j\omega RC}{\omega^2 MC}$.

Si: $\begin{cases} I_1 = |I_1| e^{j\phi_1} \\ I_2 = |I_2| e^{j\phi_2} \end{cases}$ entonces: $\dfrac{I_1}{I_2} = \left|\dfrac{I_1}{I_2}\right| e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$ con:

$$\boxed{\tan(\phi_1 - \phi_2) = \frac{\mathrm{Im}[I_1/I_2]}{\mathrm{Re}[I_1/I_2]} = \frac{\omega RC}{1-\omega^2 L_2 C}}$$

c) $\phi_1 - \phi_2 = \dfrac{\pi}{2} \; \Leftrightarrow \begin{cases} \omega^2 L_2 C - 1 = 0 \\ \omega \neq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = \dfrac{1}{L_2 C}} \quad (\omega \neq 0).$

Problema 3



a) Suponiendo que: $\vec{H} = H(r)\hat{e}_\phi$ y aplicando la ley de Ampère:

$$\boxed{\begin{array}{ll} r<a: & 2\pi H(r)=0 \;\Rightarrow\; H(r)=0 \\ a<r<b: & 2\pi H(r)=I \;\Rightarrow\; H(r)=\dfrac{I}{2\pi}\dfrac{1}{r} \\ b<r: & 2\pi H(r)=(I-I)=0 \;\Rightarrow\; H(r)=0 \end{array}}$$

b) $H(r)=\dfrac{I}{2\pi}\dfrac{1}{r}<H_{sat} \quad \forall r \quad \Leftrightarrow \quad I<2\pi r H_{sat} \quad \forall r \quad \Leftrightarrow \quad I<2\pi a H_{sat}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_1 = 2\pi a H_{sat}}$$

c) $H(r)=\dfrac{I}{2\pi}\dfrac{1}{r}>H_{sat} \quad \forall r \quad \Leftrightarrow \quad I>2\pi r H_{sat} \quad \forall r \quad \Leftrightarrow \quad I>2\pi b H_{sat}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_2 = 2\pi b H_{sat}}$$

d) La energía aportada al sistema se convierte únicamente en energía magnética.

$* \; I=0 \quad \Rightarrow \quad H(r)=B(r)=0 \quad \forall r \quad \Rightarrow \quad U_m^i = 0$

$* \; I=I_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{H}(r)=\dfrac{I_2}{2\pi r}\hat{e}_\phi \quad (a<r<b)$

Como está saturado: $\vec{B}(r)=\left[B_{sat}+\mu_0(H(r)-H_{sat})\right]\hat{e}_\phi$

$$\Rightarrow \; u_m(r)=\frac{1}{2}\vec{B}(r).\vec{H}(r)=\frac{1}{2}\left[(B_{sat}-\mu_0 H_{sat})H(r)+\mu_0 H^2(r)\right] \qquad a<r<b;$$

$u_m(r)=0$ si $r<a$ o $b<r$

$U_m^f = \displaystyle\int_a^b u_m(r)2\pi L r dr$ ($2\pi L r dr$ es el elemento de volumen radial).

$$U_m^f = \frac{2\pi L}{2}\int_a^b \left[(B_{sat}-\mu_0 H_{sat})\frac{I_2}{2\pi r}r + \mu_0\frac{I_2^2}{4\pi^2 r^2}r\right]dr$$

$$= \frac{1}{2}(B_{sat}-\mu_0 H_{sat})LI_2(b-a) + \frac{\mu_0 L I_2^2}{4\pi}\mathrm{Ln}\left(b/a\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta U_m = \frac{1}{2}(B_{sat}-\mu_0 H_{sat})LI_2(b-a) + \frac{\mu_0 L I_2^2}{4\pi}\mathrm{Ln}\left(b/a\right)}$$