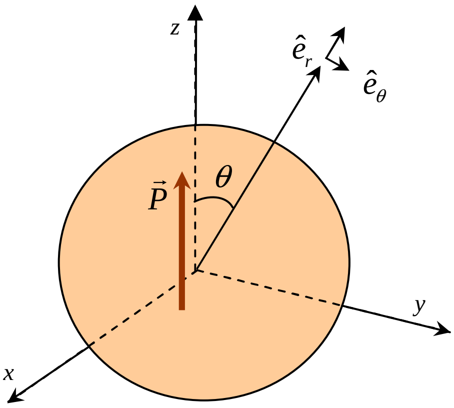
1er Parcial 2008
Solución Problema 1



(a) La polarización uniforme de la esfera es debida a una polarización permanente y por ende no es lineal con el campo eléctrico. La esfera se encuentra en el vacío, por lo que las relaciones entre los campos son las siguientes:

$$\boxed{\begin{cases} \vec{D}_1 = \varepsilon_0 \vec{E}_1 + \vec{P} & \text{si r < a} \\ \vec{D}_2 = \varepsilon_0 \vec{E}_2 & \text{si r > a} \end{cases}}$$

(b) Utilizando las definiciones de las densidades de carga de polarización :

$$\boxed{\sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n} = (P_0\hat{k})\cdot\hat{e}_r = P_0\cos\theta}$$

$$\boxed{\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} = -\nabla\cdot(P_0\vec{k}) = -\frac{dP_0}{dz} = 0}$$

Alternativamente, usando coordenadas esféricas:

$$\vec{P} = P_0\vec{k} = P_0\hat{k} = P_0(\cos\theta\hat{e}_r - \sin\theta\hat{e}_\theta) \Rightarrow \begin{cases} P_r = P_0\cos\theta = \sigma_P \\ P_\theta = -P_0\sin\theta \end{cases}$$

$$\rho_P = -\nabla.\vec{P} \overset{(ESF.)}{=} -\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 P_0\cos\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial[\sin\theta(-\sin\theta)P_0]}{\partial\theta}\right\}$$

$$\Rightarrow \rho_P = \frac{2r}{r^2}P_0\cos\theta - \frac{2\sin\theta\cos\theta P_0}{r\sin\theta} = 0\,.$$

(c) El problema tiene simetría de revolución con respecto al eje $\vec{k}$. El potencial verifica la ecuación de Laplace, dentro y fuera de la esfera ya que en ambas regiones la densidad volumétrica de carga libre es nula. Entonces los potenciales en cada región tienen la forma:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_1(r,\theta) = \sum\left(A_{n,1}r^n + B_{n,1}r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta), & r < a \\ \varphi_2 = \varphi_2(r,\theta) = \sum\left(A_{n,2}r^n + B_{n,2}r^{-(n+1)}\right)P_n(\cos\theta), & r > a \end{cases}$$

En la interfase entre los dos medios se deben de satisfacerse las siguientes condiciones de borde:

- $\boxed{\varphi_1(r=a) = \varphi_2(r=a) \quad , \ \forall\ \theta}$ (1.c)
- $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1).\hat{e}_r = \sigma_L \Rightarrow (\varepsilon_0\vec{E}_2 - \varepsilon_0\vec{E}_1 - P_0\vec{k}).\hat{e}_r = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}(r=a) - \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(r=a) + P_0 \cos\theta = 0, \forall \theta} \qquad (2.c)$$

- La condición $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1).\vec{e}_\theta = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$ es equivalente en este caso a la condición (1.c).

(d) Considero soluciones de la forma:

$$\begin{cases} \varphi_1(r,\theta) = A_{0,1} + \dfrac{B_{0,1}}{r} + \left(A_{1,1} r + \dfrac{B_{1,1}}{r^2} \right) \cos\theta \quad , \quad \text{si r < a} \\ \varphi_2(r,\theta) = A_{0,2} + \dfrac{B_{0,2}}{r} + \left(A_{1,2} r + \dfrac{B_{1,2}}{r^2} \right) \cos\theta \quad , \quad \text{si r > a} \end{cases}$$

donde debo determinar las constantes $A_{0,1}, B_{0,1}, A_{1,1}, B_{1,1}, A_{0,2}, B_{0,2}, A_{1,2}, B_{1,2}$ de modo que $\varphi_1(r,\theta)$ y $\varphi_2(r,\theta)$ cumplan las condiciones de borde halladas en (c), además de las condiciones en el origen ($r \ll a$) y en el infinito ($r \gg a$). Encontrar los potenciales significa encontrar las constantes de forma que se satisfagan todas las condiciones.

- Por hipótesis sabemos que el potencial en el infinito es nulo, por lo que necesariamente las constantes $A_{0,2}$ y $A_{1,2}$ son nulas. $\Rightarrow A_{0,2} = A_{1,2} = 0$

- En el origen el potencial debe ser acotado. Por lo tanto $B_{0,1}=B_{1,1}=0$.

- Un término proporcional a $1/r$ del potencial corresponde a una carga neta del sistema. Dado que en el problema es nula, también debe serlo el coeficiente $B_{0,2}$. $\Rightarrow B_{0,2} = 0$ (también $B_{0,1}$, pero ya habíamos deducido que era nulo).

- Imponiendo la continuidad del potencial, ecuación (1.c),

$$A_{0,1} + A_{1,1} a \cos\theta = \frac{B_{1,2}}{a^2} \cos\theta \Rightarrow \text{se debe cumplir } \forall\theta \Rightarrow \begin{cases} A_{0,1} = 0 \\ A_{1,1} = \dfrac{B_{1,2}}{a^3} \end{cases} \qquad (1.d)$$

- Imponiendo (2.c) :

$$A_{1,1} = \frac{P_0}{\varepsilon_0} - 2\frac{B_{1,2}}{a^3} \qquad (2.d)$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (1.d) y (2.d):

$$A_{1,1} = \frac{P_0}{3\varepsilon_0} \quad \text{y} \quad B_{1,2} = \frac{P_0 a^3}{3\varepsilon_0}$$

<u>Nota</u>:

Alternativamente, sabemos que para $r >> a$, debe observarse el potencial de un dipolo:

$$\varphi_2(\vec{r}) \to \frac{\vec{p}.\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0}$$

donde el momento dipolar es $\vec{p} = \frac{4\pi}{3} a^3 \vec{P}$, dado que la polarización (momento dipolar por unidad de volumen) es uniforme, $\vec{P} = P_0 \hat{k}$.

$$\Rightarrow \varphi_2(\vec{r}) \to \frac{P_0 a^3 \cos\theta}{3\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow B_{1,2} = \frac{P_0 a^3}{3\varepsilon_0} \quad \text{y usando (1.d) :} \quad A_{1,1} = \frac{P_0}{3\varepsilon_0}.$$

La expresión del potencial queda finalmente:

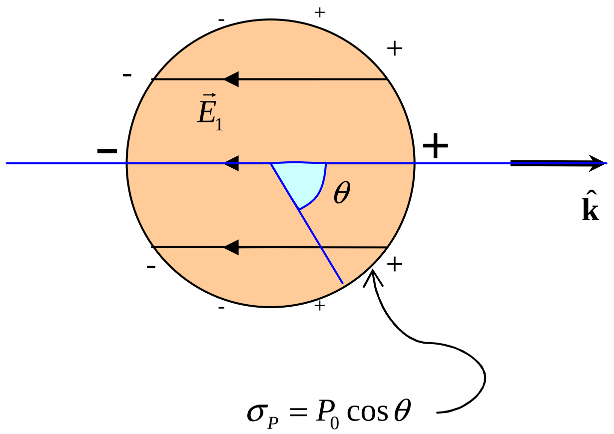
$$\boxed{\begin{cases} \varphi_1(r,\theta) = \dfrac{P_0 r}{3\varepsilon_0}\cos\theta & , \quad \text{si r < a} \\ \varphi_2\ (r,\theta) = \dfrac{P_0 a^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{\cos\theta}{r^2} & , \quad \text{si r > a} \end{cases}}$$

(e) La expresión para el campo eléctrico dentro de la esfera es:

$$\vec{E}_1(r,\theta) = -\nabla\varphi_1(r,\theta) = -\frac{P_0}{3\varepsilon_0}\left(\cos\theta\ \hat{e}_r - \sin\theta\ \hat{e}_\theta\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_1(r,\theta) = -\frac{P_0}{3\varepsilon_0}\hat{k}} \text{ (uniforme)}$$

El campo eléctrico en el interior de la esfera queda en sentido contrario a la polarización.



Solución Problema 2

(a) Calculamos la capacidad del condensador A como el equivalente de conectar *dos condensadores en paralelo,* en los cuales en uno no hay dieléctrico (permitividad ε_0) y en el otro hay material dieléctrico de permitividad ε. Recordemos que la capacidad equivalente de dos condensadores en paralelo es su suma. Sea $\varepsilon = (1+\lambda)\varepsilon_0$ (en el problema tenemos $\lambda = 0{,}2$). Observar que $k = \varepsilon / \varepsilon_0$ es la constante dieléctrica del medio; luego $\lambda = k - 1$.

Entonces:

$$C_A = \frac{\varepsilon_0 x l}{d} + \frac{\varepsilon (l-x) l}{d} = \frac{\varepsilon_0 l[(1+\lambda)l - \lambda x]}{d} = \frac{\varepsilon_0 l[1{,}2l - 0{,}2x]}{d}$$

Razonando análogamente para B, tenemos:

$$C_B = \frac{\varepsilon_0 (l-x) l}{d} + \frac{\varepsilon x l}{d} = \frac{\varepsilon_0 l[l + 0{,}2x]}{d}$$

y resulta:

$$\boxed{C_{EQ.} = C_A + C_B = \frac{\varepsilon_0 l^2 (2{,}2)}{d}}$$

(b) La energía almacenada en un condensador de capacidad C sometido a una diferencia de potencial V es $U = \frac{1}{2} C V^2$. Por lo tanto,

$$U_A(x) = \frac{1}{2} C_A V^2 = \frac{\varepsilon_0 l[1{,}2l - 0{,}2x]}{2d} V^2$$

$$U_B(x) = \frac{1}{2} C_B V^2 = \frac{\varepsilon_0 l[l + 0{,}2x]}{2d} V^2$$

$$\boxed{U_{SIST.} = U_A + U_B = \frac{\varepsilon_0 l^2 (2{,}2)}{2d} V^2}$$

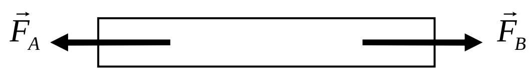
(c) El incremento en la energía del sistema cuando se mueve una cantidad *dx* al condensador es $dU = -Fdx + VdQ$, donde $-Fdx$ es el trabajo de la fuerza electrostática sobre el dieléctrico y VdQ es el trabajo realizado por la fuente. Despejo F, recordando que *en el proceso V es constante*:

$$F = -\frac{dU}{dx} + V\frac{dQ}{dx} = -\frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx} + V\frac{d(CV)}{dx} = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx} = \left(\frac{dU}{dx}\right)_V$$

Sea $\hat{\imath}$ el versor que va según x y de A hacia B. Por la parte (a),

$$\vec{F}_{A\to diel.} = -\frac{\varepsilon_0 l 0{,}2}{2d} V^2\,\hat{\imath}\ ;\ \vec{F}_{B\to diel.} = \frac{\varepsilon_0 l 0{,}2}{2d} V^2\,\hat{\imath}$$

$$\boxed{\vec{F}_{NETA\to diel.} = \vec{F}_{A\to diel.} + \vec{F}_{B\to diel.} = \vec{0}}$$



(d) La carga de B, antes y después de que se desconecta, no cambia. La capacidad y la diferencia de potencial entre las placas de B serán función de *x*. Tenemos $Q_B\big|_{x=x_0} = C_B\big|_{x=x_0} \cdot V = C_B\big|_x V_x$, de donde, utilizando las partes anteriores,

$$V(x) = \left(\frac{l+\lambda x_0}{l+\lambda x}\right) V(x_0).$$

Para calcular la fuerza de B, nuevamente consideramos la energía, donde esta vez sólo aparece el trabajo de la fuerza electrostática sobre el dieléctrico; $dW = -Fdx$. Observando que ahora el proceso es a *carga constante*, tenemos:

$$F = -\left(\frac{dU}{dx}\right)_Q = -\frac{d}{dx}\left(\frac{Q^2}{2C}\right) = \frac{-Q^2}{2}\left(-\frac{1}{C^2}\right)\frac{dC}{dx} = \frac{V^2}{2}\frac{dC}{dx}$$

Luego:

$$\vec{F}_{B\to diel.}(x) = \left(\frac{l+\lambda x_0}{l+\lambda x}\right)^2 V^2 \frac{\varepsilon_0 l\lambda}{2d}\,\hat{\mathrm{i}} = \left(\frac{l+0{,}2x_0}{l+0{,}2x}\right)^2 V^2 \frac{\varepsilon_0 l 0{,}2}{2d}\,\hat{\mathrm{i}}$$

Y la fuerza de A no cambia:

$$\vec{F}_{A\to diel.} = -\frac{\varepsilon_0 l\lambda}{2d} V^2\,\hat{\mathrm{i}} = -\frac{\varepsilon_0 l 0{,}2}{2d} V^2\,\hat{\mathrm{i}}$$

(e) Por la parte anterior, y poniendo $x = x_0 + \Delta x$, la fuerza neta es:

$$\boxed{\vec{F}_{NETA}(\Delta x) = \frac{\varepsilon_0 l\lambda}{2d} \mathrm{V}^2 \left[\left(\frac{l+\lambda x_0}{l+\lambda x_0+\lambda\Delta x)}\right)^2 - 1\right]\hat{\mathbf{i}}}$$

Si $\Delta x = 0$, la fuerza neta es cero.
Si $\Delta x > 0$ (movemos el dieléctrico hacia la derecha del dibujo), entonces la cantidad en el paréntesis recto es negativa, por lo que la fuerza neta es según $-\hat{\mathbf{i}}$, hacia la izquierda.
Si $\Delta x < 0$ (movemos el dieléctrico hacia la izquierda del dibujo), entonces la cantidad en el paréntesis recto es positiva, por lo que la fuerza neta es según $+\hat{\mathbf{i}}$, hacia la derecha.