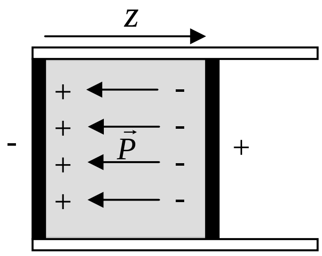
Electromagnetismo
Curso 2007
Primer parcial – Solución -

Problema 1

a) $\sigma_P = \vec{P}.\hat{e}_z$

Como el medio material es lineal:

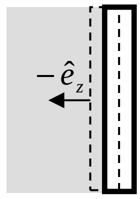


$$\vec{P} = \chi \vec{E} = \chi\,(-\frac{\phi}{z}\hat{e}_z) = -\frac{\chi\phi}{z}\hat{e}_z \Rightarrow \sigma_P = -\frac{\chi\phi}{z}$$

y por lo tanto:

$$Q_P\Big|_{\substack{placa\\positiva}} = \int_{\substack{placa\\positiva}} \sigma_P\, dS = -\frac{\chi\phi}{z}A \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_P\Big|_{\substack{placa\\positiva}} = -\frac{\chi\phi}{z}A}$$

b) Como se trata de un capacitor de placas paralelas, aplicando Gauss y tomando en cuenta que $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ se deduce que:



$$\varepsilon\vec{E}.(-\hat{e}_z)\,A = q_L\Big|_{\substack{placa\\positiva}} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\frac{\phi}{z}A = q_L \quad \Rightarrow \quad C = \frac{q_L}{\phi} = \frac{\varepsilon A}{z}$$

Por otra parte, $\chi = (k-1)\varepsilon_0 = \varepsilon - \varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \chi + \varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{(\chi+\varepsilon_0)\,A}{z}}$

c) $U = \frac{1}{2}C\phi^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \frac{1}{2}\frac{(\chi+\varepsilon_0)\,A}{z}\phi^2}$

d) La fuerza neta sobre la placa de la derecha (que es la placa móvil) debe ser nula. $\vec{F}_{gas} + \vec{F}_{elec} = 0 \Rightarrow$ buscamos z_{eq} tal que $\left|\vec{F}_{gas}(z_{eq})\right| = \left|\vec{F}_{elec}(z_{eq})\right|$

Fuerza hecha por el gas sobre la placa de la derecha:

$$\vec{F}_{gas} = p\,A\hat{e}_z = \frac{\beta N}{V}A\hat{e}_z = \frac{\beta N}{Az}A\hat{e}_z = \frac{\beta N}{z}\hat{e}_z$$

Fuerza electrostática sobre la placa de la derecha:

$\vec{F}_{elec} = \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{\phi}\hat{e}_z = \frac{1}{2}\phi^2\frac{\partial C}{\partial z}\hat{e}_z$ De la parte b) y usando que $\chi = \alpha\, n = \alpha\frac{N}{V} = \alpha\frac{N}{Az}$

$$\Rightarrow C = \frac{(\chi+\varepsilon_0)\,A}{z} = \frac{\alpha N}{z^2} + \frac{\varepsilon_0 A}{z} \qquad \Rightarrow \vec{F}_{elec} = -\frac{\phi^2}{2z^3}\left(2\alpha N + \varepsilon_0 A z\right)\hat{e}_z.$$

Imponiendo $\left|\vec{F}_{gas}(z_{eq})\right| = \left|\vec{F}_{elec}(z_{eq})\right|$ se llega a una ecuación de segundo grado en z_{eq}:

$$z^2 - \left(\frac{\varepsilon_0 A\phi^2}{2\beta N}\right)z - \left(\frac{\alpha\phi^2}{\beta}\right) = 0$$

cuya solución es (descartando z_{eq}<0): $\boxed{z_{eq} = \frac{\varepsilon_0 A\phi^2}{4\beta N}\left\{1+\sqrt{1+\frac{16\,\alpha\beta N^2}{\varepsilon_0^{\,2} A^2\phi^2}}\right\}}$

Problema 2

a) El problema tiene simetría de revolución con respecto a un eje que pasa por el centro de la esfera alineado según el campo externo $\mathbf{E}_0$. El potencial ϕ cumple la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi = 0$ dentro y fuera de la esfera, ya que no hay carga libre.

- En el interior de la esfera ϕ debe ser constante por tratarse de un conductor aislado en equilibrio.
- Para la parte exterior a la esfera, se plantea la solución de la ecuación de Laplace con simetría de revolución

$$\phi(r,\theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right)\cos\theta \quad . \tag{1}$$

<u>Condiciones de Borde:</u>

- Lejos de la esfera la forma del potencial tiene que ser tal que dé lugar al campo externo aplicado $\mathbf{E}_0$, es decir

$$\phi_0(r,\theta) = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta \quad . \tag{2}$$

(a menos de una constante arbitraria). El potencial (1) considerado en $r >> a$ resulta

$$\phi(r,\theta) \underset{r>>a}{\approx} A_0 + A_1 r\cos\theta \tag{3}$$

lo que determina el coeficiente $\boxed{A_1 = -E_0}$.

- El término monopolar B_0/r del potencial (1) proviene de la carga neta Q de la esfera. El potencial correspondiente es $\phi_{\text{monopolo}}(\mathbf{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, de lo que se deduce[1] que el valor del coeficiente es $\boxed{B_0 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}}$.
- La superficie de la esfera forma una equipotencial. Por lo tanto, evaluando en $r = a$, resulta

$$\phi(a,\theta) = A_0 + \frac{B_0}{a} + \left(A_1 a + \frac{B_1}{a^2} \right)\cos\theta = \text{cte.}$$

Para que esto sea válido para todo θ, el factor entre paréntesis debe anularse. Por lo tanto se obtiene $\boxed{B_1 = -A_1 a^3 = E_0 a^3}$.

Finalmente, sustituyendo estos coeficientes en el potencial (1), el resultado es

$$\boxed{\phi(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} & r < a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + E_0\left(\dfrac{a^3}{r^2} - r\right)\cos\theta, & r > a \end{cases}} \tag{4}$$

(se eligió $\boxed{A_0 = 0}$).

[1] Alternativamente se puede calcular el flujo del campo que proviene de un potencial de la forma (1), a través de una esfera concéntrica. El resultado es $4\pi B_0$ y mediante la Ley de Gauss se iguala a Q/ε_0.

b) El campo eléctrico $\mathbf{E}$ queda determinado por el potencial:

$$\boxed{\mathbf{E}(r,\theta) = -\nabla\phi(r,\theta) = \begin{cases} 0, & r < a \\ \mathbf{E}_0 + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{e}}_r + E_0\left(2\dfrac{a^3}{r^3}\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r + \dfrac{a^3}{r^3}\operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta\right), & r > a \end{cases}}$$

(el campo eléctrico externo se puede descomponer en componentes esféricas como $\mathbf{E}_0 = E_0\hat{\mathbf{k}} = E_0(\cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_r - \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{e}}_\theta)$).

c) La densidad superficial de carga se puede calcular de la condición de borde para el campo eléctrico en la superficie de la esfera:

$$\left(\mathbf{E}_{\text{afuera}} - \mathbf{E}_{\text{adentro}}\right)\Big|_{r=a} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,. \tag{5}$$

Con $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_r$ en la superficie de la esfera, queda

$$\sigma(\theta) = \frac{Q}{4\pi a^2} + 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \tag{6}$$

d) La densidad de carga (6) se anula en los puntos de la superficie tales que

$$\cos\theta = -\frac{Q}{12\pi a^2 \varepsilon_0 E_0}\,. \tag{7}$$

Para que la ecuación anterior *no tenga* solución, como $|\cos\theta| \le 1$, se debe verificar

$$\left|\frac{Q}{12\pi a^2 \varepsilon_0 E_0}\right| > 1 \Leftrightarrow \boxed{Q > 12\pi a^2 \varepsilon_0 E_0} \tag{8}$$

donde $|Q| = Q$ ya que $Q > 0$.

e) El potencial para un dipolo $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{k}}$ en el origen es

$$\phi_{\text{dipolo}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,. \tag{9}$$

El término dipolar correspondiente del potencial (4) está dado por

$$\frac{E_0 a^3 \cos\theta}{r^2}$$

de lo que se desprende[2] que el momento dipolar correspondiente a este caso es

$$\boxed{\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \mathbf{E}_0} \tag{10}$$

[2] Otra manera de llegar al resultado es usar la densidad de carga ya encontrada en la parte (c) y utilizar la dfinición del momento dipolar: $\mathbf{p} = \int_S \sigma(\mathbf{r})\,\mathbf{r}\,dS$