Soluciones del primer parcial de Electromagnetismo - 2005

Problema 1

a)

Dentro de la esfera: $\vec{E}_1 = -\nabla\Phi_1$

$$\nabla.\vec{D}_1 = r_L = 0$$

$$\nabla.\vec{D}_1 = e_0\nabla.\vec{E}_1 + \nabla.\vec{P} = e_0\nabla.\vec{E}_1 \qquad \Rightarrow \quad \nabla.\vec{E}_1 = 0$$

$$\boxed{\therefore \quad -\nabla^2\Phi_1 = \nabla.(-\nabla\Phi_1) = 0}$$

Fuera de la esfera: $\vec{E}_2 = -\nabla\Phi_2$

$$\nabla.\vec{D}_2 = r_L = 0$$

$$\nabla.\vec{D}_2 = e_0\nabla.\vec{E}_2 \qquad \Rightarrow \quad \nabla.\vec{E}_2 = 0$$

$$\boxed{\therefore \quad -\nabla^2\Phi_2 = \nabla.(-\nabla\Phi_2) = 0}$$

b)

En la esfera: $\boxed{r_P = -\nabla.\vec{P} = 0}$

En el vacío: $\boxed{r_P = 0}$

$$\boxed{s_P = \vec{P}.\hat{e}_r = P\,\hat{k}.\hat{e}_r = P\cos q}$$

c) Se supone ahora:

$$\Phi_1 = A_1 + B_1 r\cos q$$

$$\Phi_2 = \frac{A_2}{r} + \frac{B_2}{r^2}\cos q$$

Condiciones de borde:

- $$\Phi_2 \xrightarrow[r\to\infty]{} \frac{B_2}{r^2}\cos q \qquad \therefore A_2 = 0$$

- $$\vec{E}_1 = -\nabla\Phi_1 = -B_1\cos q\ \hat{e}_r + B_1\sin q\ \hat{e}_q$$
  $$\vec{E}_2 = -\nabla\Phi_2 = 2\frac{B_2}{r^3}\cos q\ \hat{e}_r + \frac{B_2}{r^3}\sin q\ \hat{e}_q$$

$E_{1t}(R) = E_{2t}(R)$

$\hat{t} = \hat{e}_q \qquad \Rightarrow \quad B_1 = \frac{B_2}{R^3}$

- $$\vec{D}_1 = e_0\vec{E}_1 + \vec{P} = -e_0 B_1\cos q\ \hat{e}_r + e_0 B_1\sin q\ \hat{e}_q + P\hat{k}$$
  $$\vec{D}_2 = e_0\vec{E}_2 = 2e_0\frac{B_2}{r^3}\cos q\ \hat{e}_r + e_0\frac{B_2}{r^3}\sin q\ \hat{e}_q$$

$$D_{1n}(R) = D_{2n}(R)$$

$$\hat{n} = \hat{e}_r \qquad \Rightarrow \qquad -e_0 B_1 \cos q + P \cos q = 2e_0 \frac{B_2}{R^3} \cos q = 2e_0 B_1 \cos q$$

$$\Rightarrow \quad B_1 = \frac{P}{3e_0} \qquad \text{y} \qquad B_2 = \frac{PR^3}{3e_0}$$

Los campos dentro y fuera son:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}_1 &= -\frac{P}{3e_0}(\cos q \;\hat{e}_r - \sin q \;\hat{e}_q) = -\frac{P}{3e_0}\hat{k} \\ \vec{E}_2 &= \frac{PR^3}{3e_0}\left(\frac{2}{r^3}\cos q \;\hat{e}_r + \frac{1}{r^3}\sin q \;\hat{e}_q\right) \end{aligned}}$$

Problema 2

a) En coordenadas cilíndricas, por la simetría del problema:

$\vec{E} = E(r)\hat{e}_r \quad \Rightarrow \quad \Phi = \Phi(r)$ En el dieléctrico y en el vacío.

De la ecuación de Laplace para Φ:

$$\vec{E}_D = \frac{C_D}{r}\hat{e}_r \qquad \vec{E}_V = \frac{C_V}{r}\hat{e}_r$$

En la interfaz entre el dieléctrico y el vacío: $E_{1t} = E_{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{C_D}{r} = \frac{C_V}{r} \qquad \therefore C_D = C_V$

Entonces: $\vec{E} = \frac{C}{r}\hat{e}_r$ en toda la región entre los conductores.

Es: $-V = \Phi_2 - \Phi_1 = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{C}{r} dr \quad \Rightarrow \quad V = C\, Ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{V}{Ln(R_2/R_1)}\frac{1}{r}\hat{e}_r}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{D}_V = e_0\vec{E} && \vec{D}_D = e\,\vec{E} \\ &\vec{P}_V = 0 && \vec{P}_D = c\,\vec{E} = (e - e_0)\vec{E} = e_0(K-1)\vec{E} \end{aligned}}$$

b)

En la región vacía:

$$s_{libre}^{1} = e_0 \vec{E}(R_1).\hat{e}_r = e_0 \frac{V}{Ln(R_2/R_1)} \frac{1}{R_1}$$

$$s_{libre}^{2} = e_0 \vec{E}(R_2).(-\hat{e}_r) = -e_0 \frac{V}{Ln(R_2/R_1)} \frac{1}{R_2}$$

En la región con dieléctrico:

$$s_{libre}^{1} = e\, \vec{E}(R_1).\hat{e}_r = e \frac{V}{Ln(R_2/R_1)} \frac{1}{R_1}$$

$$s_{libre}^{2} = e\, \vec{E}(R_2).(-\hat{e}_r) = -e \frac{V}{Ln(R_2/R_1)} \frac{1}{R_2}$$

$$s_{pol.}^{1} = \vec{P}(R_1).(-\hat{e}_r) = e_0 (K-1)\vec{E}(R_1).(-\hat{e}_r) = -e_0 (K-1) \frac{V}{Ln(R_2/R_1)} \frac{1}{R_1}$$

$$s_{pol.}^{2} = \vec{P}(R_2).\hat{e}_r = e_0 (K-1)\vec{E}(R_2).\hat{e}_r = e_0 (K-1) \frac{V}{Ln(R_2/R_1)} \frac{1}{R_2}$$

$$r_P = -\nabla.\vec{P} = -e_0 (K-1) \frac{V}{Ln(R_2/R_1)} \nabla.(\frac{1}{r}\hat{e}_r) = 0$$

c)

A potencial constante: $\vec{T} = \left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_V \hat{k}$, $\quad \hat{k}$ saliente.

$$U = U_D + U_V$$

$$U_D = \int_{V_D} \frac{1}{2} e\, E^2 dV = \frac{1}{2} e \frac{V^2}{Ln^2(R_2/R_1)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} L\, r q \; dr$$

$$\Rightarrow U_D = \frac{1}{2} \frac{e\, Lq}{Ln(R_2/R_1)} V^2$$

$$U_V = \int_{V_V} \frac{1}{2} e_0\, E^2 dV = \frac{1}{2} e_0 \frac{V^2}{Ln^2(R_2/R_1)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} L\, r (\frac{3}{4}p - q)\; dr$$

$$\Rightarrow U_V = \frac{1}{2} \frac{e_0\, L(\frac{3}{4}p - q)}{Ln(R_2/R_1)} V^2$$

$$\therefore\; U = \frac{1}{2}(e - e_0)\frac{LV^2}{Ln(R_2/R_1)} q + \frac{3}{4} \frac{e_0 L V^2}{Ln(R_2/R_1)}$$

$$\Rightarrow\; \vec{T} = \frac{1}{2}(e - e_0) \frac{LV^2}{Ln(R_2/R_1)} \hat{k}$$

d)

$$\vec{J} = g\vec{E} = \frac{gV}{Ln(R_2/R_1)}\frac{1}{r}\hat{e}_r$$

En una superficie cilíndrica de radio r, contenida en el dieléctrico y que abarque el ángulo q :

$$I = \int_S \vec{J}.\hat{e}_r \; dS = \frac{gV}{Ln(R_2/R_1)}\frac{1}{r}\int_S dS = \frac{gV}{Ln(R_2/R_1)}\frac{1}{r}(q \; r \; L)$$

$$\Rightarrow I = \frac{gV}{Ln(R_2/R_1)} q \; L$$

$$\boxed{\therefore \; R = \frac{V}{I} = \frac{1}{g}\frac{Ln(R_2/R_1)}{q \, L}}$$