Solución Examen de Julio de 2010

Electromagnetismo

Problema 1

(a) Las ecuaciones constitutivas para el medio quedan $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ y $\vec{J} = g\vec{E}$. De la ley de Gauss, $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, y la ecuación de continuidad, $\nabla \cdot \vec{J} = -\dot{\rho}$, deducimos que

$$\dot{\vec{J}} = -\frac{g}{\varepsilon}\vec{J},$$

de donde, por simetría, $\vec{J}(r,t) = J(r)e^{-\frac{gt}{\varepsilon}}\hat{e_r}$. Como la carga libre en el material es cero inicialmente, para tener divergencia nula (así $\nabla \cdot \vec{D} = 0$), debe ser $J(r) = \frac{J_0}{r^2}$, J_0 cte.

Impongo CB en $t = 0$:

$$\vec{D} \cdot \hat{e_r}(r = a, t = 0) = \sigma = \frac{Q}{4\pi a^2} \Rightarrow J(r = a, t = 0) = \frac{gQ}{4\pi\epsilon a^2} = \frac{J_0}{a^2}.$$

Se deduce que

$$J(r,t) = \frac{gQ}{4\pi\varepsilon r^2}e^{-\frac{gt}{\varepsilon}},$$

$$I(t) = \int_{S_r} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \frac{gQ}{\varepsilon}e^{-\frac{gt}{\varepsilon}},$$

donde S_r es una superficie esférica concéntrica con el sistema, y de radio r.

(b) La potencia disipada por efecto Joule es:

$$\begin{aligned} P = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV &= e^{-\frac{2gt}{\varepsilon}} 4\pi \int_a^b r^2 \frac{1}{g}\left(\frac{gQ}{4\pi\varepsilon r^2}\right)^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{4\pi}\frac{g}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)e^{-\frac{2gt}{\varepsilon}}, \end{aligned}$$

donde V es la región interior del sistema. Notar que $P \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Por otra parte,

$$W_{dis}(t) = \int_0^t P(u)du = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(1 - e^{-\frac{-2gt}{\varepsilon}}\right).$$

La energía electrostática almacenada en el sistema es:

$$\begin{aligned} U(t) = \frac{1}{2}\int_V D(\vec{r},t)E(\vec{r},t)dV &= \frac{e^{-\frac{2gt}{\varepsilon}}}{2}\int_V \vec{D}(r) \cdot \vec{E}(r)dV \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}e^{-\frac{2gt}{\varepsilon}}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right). \end{aligned}$$

Entonces la disminución de energía electrostática es:

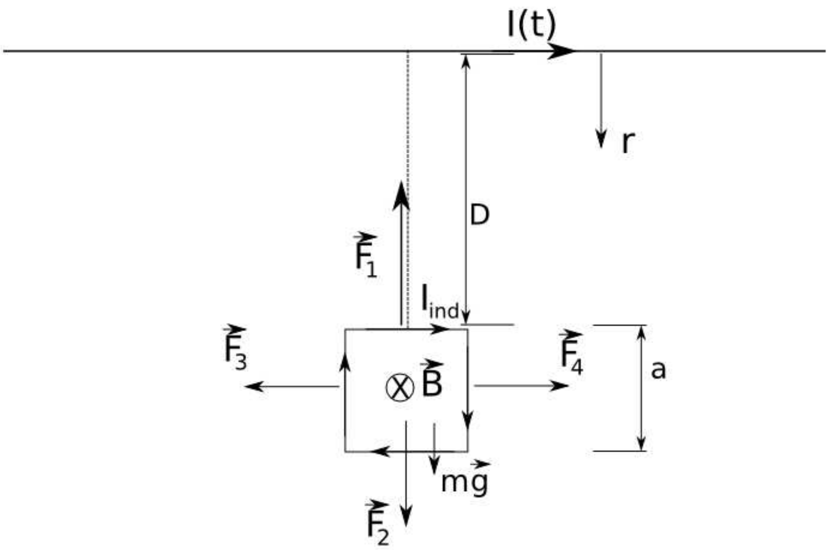
$$U(t=0) - U(t) = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(1 - e^{-\frac{2gt}{\varepsilon}}\right) = W_{dis}(t),$$

que es lo que queríamos probar. Además,

$$W_{dis} = U(t=0) - U(t) \to \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right), t \to +\infty.$$

Problema 2

(a) Recordemos que la fuerza magnética entre dos cables es atractiva si éstos transportan corriente en la misma dirección, y repulsiva si transportan corriente en sentidos opuestos, debido a la fuerza de Lorentz. Para que la espira se mantenga en reposo, la fuerza magnética neta debe cancelar al peso de la espira. Esa fuerza estará dada por la resulante sobre los segmentos de espira horizontales (las fuerzas sobre los segmentos verticales se anulan), ver figura . La fuerza F_1 debe ser mayor que F_2, y deben tener los sentidos indicados.



La fem inducida en la espira es

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ind} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dA\right] \\
&= -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\left(\frac{dI}{dt}\right)\int_D^{D+a} \frac{1}{r} dr \\
&= -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\left(\frac{dI}{dt}\right)\log\left(1 + \frac{a}{D}\right).
\end{aligned}$$

Luego:

$$I_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi R}\left(\frac{dI}{dt}\right)\log\left(1 + \frac{a}{D}\right). \tag{1}$$

El balance de fuerzas sobre la espira da, al imponer equilibrio: $F_1 - F_2 - mg = 0$. Aquí

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi D} I_{ind} a, \\ F_2 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi (D+a)} I_{ind} a. \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\mu_0 a}{2\pi D} I I_{ind} - \frac{\mu_0 a}{2\pi (D+a)} I I_{ind} = mg, \tag{2}$$

y por lo tanto

$$I_{ind} = \frac{mg}{\frac{\mu_0 a}{2\pi}\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D+a}\right) I},$$

y al sustituir en (1),

$$I\left(\frac{dI}{dt}\right) = -C = \text{constante}, \tag{3}$$

con

$$C \equiv \frac{4\pi^2 R}{\mu_0^2 a^2} \frac{mg}{\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D+a}\right) \frac{1}{\log\left(1+\frac{a}{D}\right)}}.$$

Para resolver la ecuación diferencial (3), integramos en el tiempo a ambos lados de la igualdad. Al hacerlo, obtenemos finalmente la forma que debe tener la corriente por el alambre en función del tiempo:

$$I(t) = \sqrt{I_0^2 - 2Ct}. \tag{4}$$

Hagamos algunas observaciones. En primer lugar, para que I_{ind} tenga el sentido correcto, el flujo debe estar disminuyendo. Esto es posible sólo si (ver ecuación (1)) la corriente $I(t)$ es *decreciente* con el tiempo. Esto se verifica en la ec. (4).

Por otra parte, el equilibrio se podrá mantener sólo desde $t = 0$ hasta $t^* = \frac{I_0^2}{2C}$.

Problema 3

(a) De acuerdo con la Ley de Ampère,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Phi \Re = I_E + NI,$$

donde $\Re$ es la reluctancia, Φ el flujo magnético, e I_E la corriente en la espira. La autoinducción de la espira será:

$$L \equiv \frac{d\Phi}{dI_E} = \frac{1}{\Re},$$

entonces el coeficiente de inducción mutua (M) será:

$$M \equiv= N\frac{d\Phi}{dI_E} = \frac{N}{\Re} = NL.$$

(b) La corriente en la espira verificará:

$$RI_E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{\Re}\left(\frac{dI_E}{dt} + N\frac{dI}{dt}\right),$$

entonces

$$RI_E + L\frac{dI_E}{dt} = -NL\frac{dI}{dt}.$$

Integrando entre $t = 0$ y $t = \infty$,

$$R\int_0^\infty I_E(t)dt + L\left(I_E(\infty) - I_E(0)\right) = -NL\left(I(\infty) - I(0)\right).$$

Dado que $I_E(\infty) = I_E(0) = I(0) = 0$, y $B_0S = \Phi = \frac{1}{\Re}NI(\infty) = NLI(\infty)$, de la ecuación anterior obtenemos la carga total que atraviesa la espira:

$$Q \equiv \int_0^\infty I_E(t)dt = -\frac{B_0S}{R}.$$