

Problema N° 1

a) Cuando el tubo de gas no está presente, el circuito es un RC en serie, cuya ecuación es

$$V_F - Ri(t) - \frac{q(t)}{C} = 0$$

donde $q(t)$ es la carga en la placa superior del condensador. El sentido de la corriente $i(t)$ se tomó desde la terminal negativa hacia la positiva de la fuente. Usando que $i = dq/dt$, se obtiene una ecuación diferencial lineal para $q(t)$ cuya solución permite determinar $V(t) = q(t)/C$. La solución es

$$V(t) = V_F + (v_0 - V_F)e^{-t/\tau}$$

con $v_0 = q_0/C$ y $\tau = RC$.

Una forma de llegar al resultado anterior es mediante la separación de variables. La ecuación original se escribe como:

$$\frac{dq}{q - CV_F} = -\frac{dt}{\tau}$$

Integrando la igualdad entre 0 y t , se encuentra

$$\ln\left(\frac{q(t) - CV_F}{q(0) - CV_F}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

Tomando exponencial en ambos lados de la igualdad y despejando la carga, se llega a la solución buscada.

Usando la condición $V(T_1) = V_C$ en la solución hallada se determina

$$T_1 = \tau \ln\left(\frac{V_F - v_0}{V_F - V_C}\right)$$

Observar que el logaritmo resulta positivo, al ser su argumento mayor que uno (siempre que $v_0 < V_C < V_F$).

b) Cuando el tubo de gas está presente, antes de la ionización el circuito se comporta como en el caso anterior. A llegar al tiempo $t = T_1$ el gas se ioniza, de manera que aparece una resistencia r extra en el circuito, en paralelo al condensador.

Llamando i a la corriente por la fuente, i_1 a la corriente por el condensador e i_2 a la corriente por el tubo de gas (las últimas en el sentido de a a b), las ecuaciones para el circuito resultan

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ \frac{q}{C} = r i_2, \quad \text{siendo } q = \frac{di_1}{dt} \\ V_F - Ri - r i_2 = 0 \end{cases}$$

Eliminando i e i_2 , se obtiene la siguiente ecuación para i_1 y q :

$$-i_1 = -\frac{dq}{dt} = \left(\frac{R+r}{R}\right) \frac{1}{rC} \left(q - V_F C \frac{r}{R+r}\right)$$

La forma de esta ecuación es análoga a la de la primer parte. La solución para $V(t)$ es

$$V(t) = V_F \epsilon_r + (V_C - V_F \epsilon_r) e^{-t/\tau'}$$

donde $t' = t - T_1$, $\epsilon_r = \frac{r}{R+r}$ y $\tau' = \frac{R}{R+r} rC$.

Asintóticamente, el potencial tiende a $V_F \epsilon_r$ cuando $t' \gg \tau'$. El tubo de gas se mantendrá ionizado mientras $V(t) \geq v_0$. Como el valor asintótico es menor que v_0 , ya que

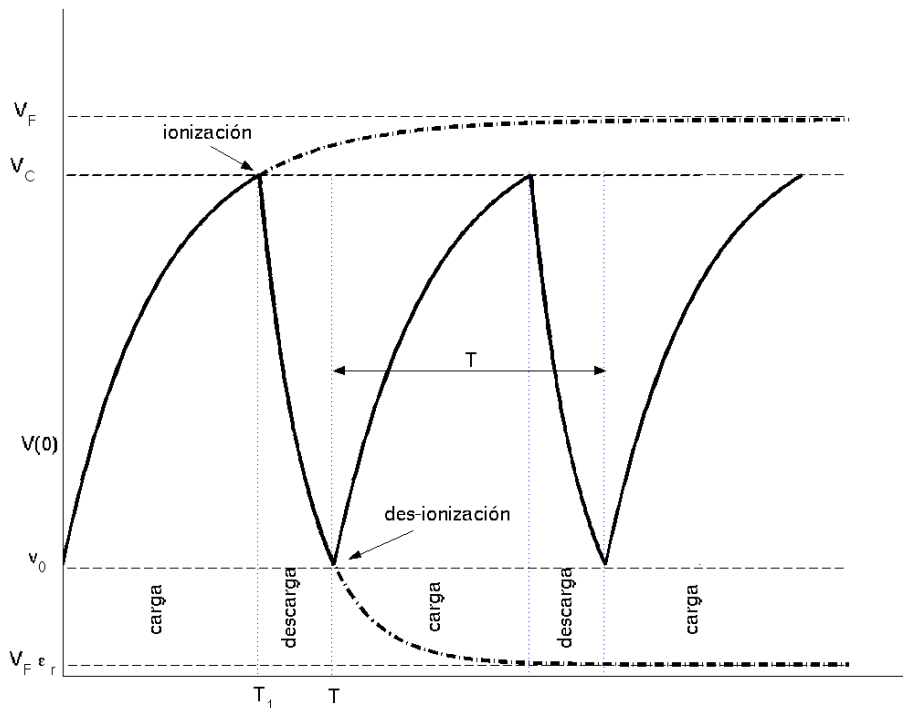
$$V_F \epsilon_r = V_F \frac{r}{R+r} < V_F \frac{r}{R} < v_0,$$

existe un tiempo $T'_1 > T_1$ en el que $V(T'_1) = v_0$. A partir de ese momento, el circuito vuelve a la situación original, con una carga de partida en el condensador dada por $q = Cv_0$. La diferencia de potencial crece hasta V_C y el ciclo se repite una y otra vez.

Observamos que si la resistencia del gas es muy pequeña, $r \ll R$, se pueden realizar la aproximación

$$\frac{R}{R+r} \approx \frac{R}{R} = 1$$

y despreciar $V_F \epsilon_r$ ante V_C . La expresión simplificada para τ' es $\tau' \cong rC$, el cual es mucho menor que el tiempo $\tau = RC$. La expresión aproximada para el potencial es $V(t) \cong V_F \epsilon_r + V_C e^{-t/\tau'}$.



c) El tiempo que tarda el circuito en volver a la situación inicial es T'_1 . Se determina en forma análoga a la parte (a), igualando la solución de la parte (b) a la condición de deionización, $V(T'_1) = v_0$. Se obtiene entonces

$$T'_1 - T_1 = \tau' \ln \left(\frac{V_C - V_F \epsilon_r}{v_0 - V_F \epsilon_r} \right),$$

con lo que el período resulta $T = T_1 + T'_1 = \tau \ln \left(\frac{V_F - v_0}{V_F - V_C} \right) + \tau' \ln \left(\frac{V_C - V_F \epsilon_r}{v_0 - V_F \epsilon_r} \right)$.

Para que el comportamiento de $V(t)$ se asemeje al de la señal triangular, se debería cumplir lograr que $V_C = V_{Max}$ y $v_0 = V_{Min}$ (de otro modo se necesitaría amplificar la señal e introducir un *offset*) y que coincidan T_1 con t_1 y T_1' con T .

Además, los tiempos de carga y de descarga deben tratar de conseguirse suficientemente pequeño, en relación a τ y τ' respectivamente, de modo que el comportamiento exponencial no se separe demasiado del comportamiento lineal.

El desarrollo de la exponencial es

$$e^{-t/\tau} = 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + \dots$$

Mientras t/τ es suficientemente pequeño, sólo los primeros términos son importantes, de forma que idealmente deberíamos buscar que se cumpla $\tau \gg T_1$ y $\tau' \gg T_1' - T_1$.

Notar que habiendo establecido los valores de V_C y v_0 , aún es posible ajustar los valores de cambiando los valores de V_F , de $\tau = RC$ y de $\tau' = rC$.

Problema2.

(a) (i) Sean $\Phi_C(t) = \Phi_C e^{j\omega t}$ la representación compleja del flujo magnético en el tiempo y $V_1(t) = V_1 e^{j\omega t}$ la representación compleja de la tensión aplicada al bobinado1 en función del tiempo. Estas magnitudes están vinculadas a través de la ley Faraday:

$$N_1 \frac{\partial \Phi_C(t)}{\partial t} = -\mathcal{E}(t) = V_1(t) \rightarrow j\omega N_1 \Phi_C e^{j\omega t} = V_1 e^{j\omega t}$$

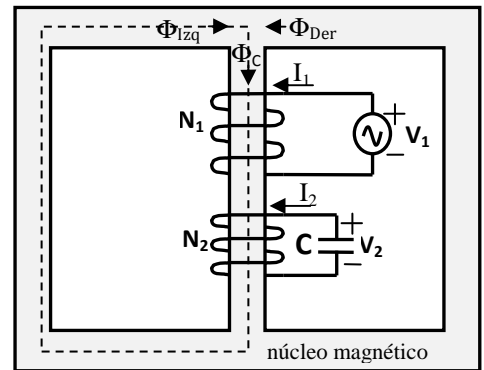
$$\rightarrow \boxed{j\omega N_1 \Phi_C = V_1} \tag{2.1}$$

(ii) La ecuación 2.1 muestra que la tensión en bornes de la bobina es proporcional a la cantidad de vueltas (N_1), a la frecuencia de trabajo (ω), y al flujo magnético Φ_C . Como la tensión y la frecuencia están impuestas, encontramos una relación entre N_1 y Φ_C que evita la saturación:

$$B \leq B_{SAT} \leftrightarrow |\Phi_C| \leq SB_{SAT}$$

$$\leftrightarrow \frac{V_1}{\omega N_1} \leq SB_{SAT} \leftrightarrow \boxed{N_1 \geq \frac{V_1}{\omega SB_{SAT}}}$$

(b)(i) La relación entre el flujo y la tensión en la segunda bobina es análoga a la ecuación (2.1). De ahí,



$$\left. \begin{aligned} V_1 &= j\omega N_1 \Phi_C \\ V_2 &= j\omega N_2 \Phi_C \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}}$$

(ii) Utilizando la ecuación anterior se halla la tensión en la bobina 2 en función del tiempo, que es proporcional a la carga instantánea en el condensador.

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1 \rightarrow v_2(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{N_2}{N_1} V_1(t) \right] = \frac{N_2}{N_1} V_1 \cos(\omega t)$$

$$\boxed{q(t) = \frac{N_2}{N_1} C V_1 \cos(\omega t)}$$

Aplicando Kirchoff en la malla de la bobina 2:

$$V_2 = -\frac{I_2}{j\omega C} \rightarrow I_2 = -j\omega C V_2 = -j\omega C \frac{N_2}{N_1} V_1 \quad (2.2)$$

de manera que la corriente es

$$i_2(t) = \frac{N_2}{N_1} \omega C V_1 \cos(\omega t - \pi / 2)$$

Luego, aplicando la ley de Ampère sobre la curva punteada:

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = \frac{l}{\mu S} \Phi_C + \frac{3l}{\mu S} \Phi_{I_{2q}} = R \Phi_C + 3R \Phi_{I_{2q}} \quad (2.3)$$

con $R = l / \mu S$. Por otro lado la simetría del sistema implica que $\Phi_{I_{2q}} = \Phi_{Der}$, y por lo tanto ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$):

$$\Phi_C = \Phi_{I_{2q}} + \Phi_{Der} = 2\Phi_{I_{2q}} \quad (2.4)$$

Combinando las ecuaciones anteriores encontramos

$$N_1 I_1 - j\omega C \frac{N_2^2}{N_1} V_1 = \frac{5}{2} R \Phi_C = \frac{5R V_1}{2j\omega N_1}$$

Despejamos la corriente como

$$I_1 = \frac{jV_1}{\omega N_1^2} \left[C(\omega N_2)^2 - \frac{5l}{2\mu S} \right] \rightarrow i_1(t) = \operatorname{Re} \{ I_1 e^{j\omega t} \} = \frac{V_1}{\omega N_1^2} \left[C(\omega N_2)^2 - \frac{5l}{2\mu S} \right] \cos(\omega t + \pi / 2)$$

Por definición de potencia media ($T = 2\pi / \omega$),

$$P = \int_0^T v_1(t) i_1(t) dt = \frac{V_1^2}{\omega N_1^2} \left[C(\omega N_2)^2 - \frac{5l}{2\mu S} \right] \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\omega t + \pi / 2) dt = 0$$

Problema 3.

a) Cuando $\delta=0$ (esfera y cascarón concéntricos) C coincide con O. Se tiene debido a la simetría esférica, en este caso, que $\phi(r, \theta, \varphi) = \phi(r)$.

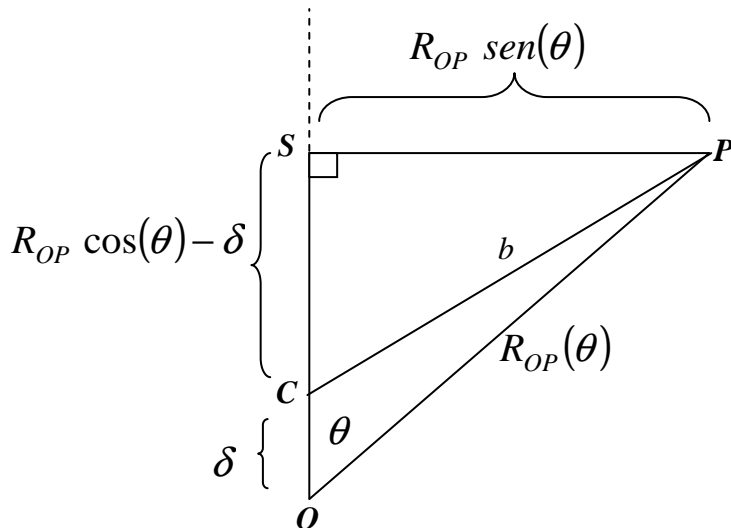
Se considera una superficie esférica de radio r ($a < r < b$) con centro en O y se deduce, a partir de la Ley de Gauss, el campo eléctrico en función de r :

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{e}_r = -\nabla\phi(r) = -\frac{d\phi}{dr} \hat{e}_r \Rightarrow \phi(r) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + cte$$

Luego, usando que $\phi(r=b)=0 \Rightarrow cte = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b}$.

Finalmente:
$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$$

b) R_{OP} se determina usando el teorema del coseno en el triángulo COP (o simplemente usando Pitágoras en el triángulo CSP):



$$b = \sqrt{R_{OP}^2 - 2R_{OP} \delta \cos(\theta)} = R_{OP} \left[1 - 2 \left(\frac{\delta}{R_{OP}} \right) \cos(\theta) \right]^{1/2} \cong R_{OP} \left[1 - \left(\frac{\delta}{R_{OP}} \right) \cos(\theta) \right] = R_{OP} - \delta \cos(\theta)$$

Donde se aproximó a primer orden en δ . Despejando b se obtiene el resultado buscado, $R_{OP}(\theta) \cong b + \delta \cos(\theta)$ (si el punto C está desplazado en el otro sentido el resultado es el mismo, pero con la variable δ cambiada de signo).

c) Cuando $C \neq O$, se sabe que la forma del potencial en el espacio entre la esfera de radio a y el cascarón de radio b es:

$$\phi(r, \theta) = \left(A_0 + \frac{B_0}{r} \right) + \delta \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos(\theta)$$

Recordemos que r se mide a partir de O. Tenemos una condición de borde para el valor del potencial en la esfera con $r=a$ y otra para el cascarón de radio b conectado a tierra. Desde O los puntos en la superficie de este último están ubicados por $R_{OP}(\theta) \cong b + \delta \cos(\theta)$, como se demostró en la parte anterior.

Entonces:

- (1) $\phi(a, \theta) = cte$ (por ser la esfera conductora)
 (2) $\phi(b + \delta \cos(\theta), \theta) = 0$

Para determinar las constantes A_0 y B_0 usamos que para $\delta \rightarrow 0$, el potencial tiende al hallado en la parte (a), el cual tiene la forma de los primeros dos términos de la solución indicada. Identificando términos, deducimos $A_0 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 b}$ y $B_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$.

Tenemos hasta ahora que:

$$\phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) + \delta \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right) \cos(\theta)$$

Para determinar las constantes A_1 y B_1 usamos las condiciones de borde:

$$\text{De (1): } \delta \left(A_1 a + \frac{B_1}{a^2} \right) \cos(\theta) = cte \quad \forall \theta \Rightarrow B_1 = -a^3 A_1$$

Sustituyendo en (2):

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 b} \left[\left(1 + \frac{\delta}{b} \cos \theta \right)^{-1} - 1 \right] + \delta A_1 \left[b + \delta \cos \theta - a^3 b^{-2} \left(1 + \frac{\delta}{b} \cos \theta \right)^{-2} \right] \cos \theta = 0 \quad \forall \theta$$

Desarrollamos los factores $(1 + \cos(\theta)\delta/b)^n$, conservando sólo los términos de primer orden en δ :

$$\left[-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 b^2} + A_1 \frac{b^3 - a^3}{b^2} \right] \delta \cos \theta = 0 \quad \forall \theta \Rightarrow A_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b^3 - a^3}, \quad B_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^3}{b^3 - a^3}$$

El potencial resulta entonces

$$\boxed{\phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{b} + \frac{\delta}{b^3 - a^3} \left(r - \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \theta \right]}$$

d) la densidad de carga en los puntos de la esfera de radio a está dada por:

$$\sigma(a, \theta) = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=a}$$

Evaluando la derivada en $r=a$ encontramos

$$\boxed{\sigma(a, \theta) = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{1}{a^2} - \frac{\delta}{b^3 - a^3} \cos \theta \right]}$$

Cuando $\delta \rightarrow 0$ se cumple $\sigma(a, \theta) \rightarrow \frac{q}{4\pi a^2}$