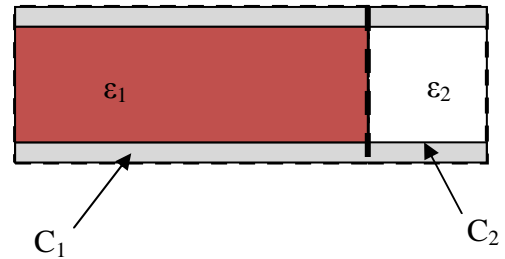


Problema 1

- a) El sistema puede ser visto como dos capacitores en paralelo, donde cada capacidad es de la forma $C_i = \epsilon_i A_i/d_i$. Entonces se obtiene:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{3\epsilon_1 L^2}{4d} + \frac{\epsilon_2 L^2}{4d} = \frac{(3\epsilon_1 + \epsilon_2)L^2}{4d}$$



- b) De la definición de capacidad

$$Q = C v_c \Rightarrow i = C \frac{dv_c}{dt}$$

Planteando la malla se llega a una ecuación diferencial:

$$V_0 = Ri + v_c \Rightarrow V_0 = RC \frac{dv_c}{dt} + v_c$$

Que se resuelve imponiendo la condición inicial de condensador descargado, obteniéndose:

$$v_c(t) = V_0 (1 - e^{-t/RC})$$

- c) Con el sistema en régimen, trabajamos en complejos

$$V(t) = V_1 \cos(\omega t) = \text{Re}(V_1 e^{j\omega t}) \Rightarrow \tilde{V} = V_1$$

$$V_1 = R\tilde{I} + \frac{\tilde{I}}{j\omega C} \Rightarrow \tilde{I} = \frac{j\omega C V_1}{Rj\omega C + 1} \Rightarrow \tilde{V}_c = \frac{\tilde{I}}{j\omega C} = \frac{V_1}{Rj\omega C + 1}$$

$$v_c(t) = \frac{V_1 \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \quad \text{donde } \varphi = \text{Arctg}(RC\omega)$$

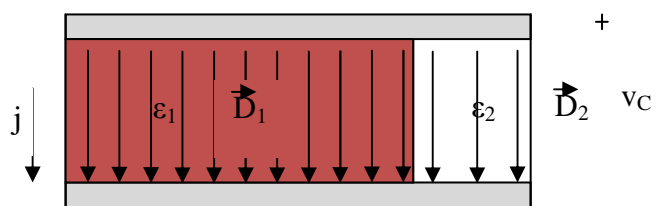
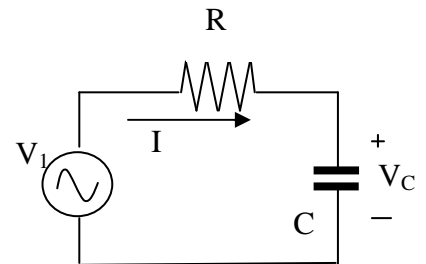
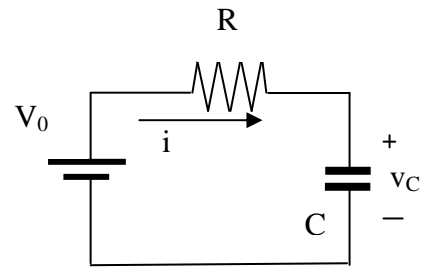
Una estimación del tiempo necesario para que el sistema alcance el régimen está dado por la constante característica RC.

- d) Aplicando superposición, la tensión en bornes del condensador en régimen :

$$v_c(t) = \frac{V_1 \cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} + V_0$$

- e) Notemos que los campos en cada zona son distintos, por lo tanto las densidades de carga también lo serán. Entonces:

$$\left. \begin{aligned} \vec{D}_1 &= \frac{\epsilon_1 v_c(t)}{d} \hat{j} \\ \vec{D}_2 &= \frac{\epsilon_2 v_c(t)}{d} \hat{j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{-\epsilon_1 v_c(t)}{d} \\ \sigma_2 &= \frac{-\epsilon_2 v_c(t)}{d} \end{aligned} \right\}$$



$$\bar{\sigma}_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{-\varepsilon_1 V_1 \cos(\omega t - \varphi)}{d \sqrt{1 + (RC\omega)^2}} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{-\varepsilon_1 V_0}{d} dt \Rightarrow \boxed{\bar{\sigma}_1 = \frac{-\varepsilon_1 V_0}{d}}$$

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{-\varepsilon_2 V_1 \cos(\omega t - \varphi)}{d \sqrt{1 + (RC\omega)^2}} dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{-\varepsilon_2 V_0}{d} dt \Rightarrow \boxed{\bar{\sigma}_2 = \frac{-\varepsilon_2 V_0}{d}}$$

Problema 2

a) En la región entre las placas, por la segunda ley de Newton:

$$m \frac{du}{dt} = \frac{qV_0}{d}, \text{ usando que } u(0) = u_0 \rightarrow u(t) = \frac{qV_0}{md} t + u_0 \quad (1)$$

$$\text{tomando que } x(0) = 0 \rightarrow x(t) = \frac{qV_0}{2md} t^2 + u_0 t \quad (2)$$

Sea t_1 el tiempo que le lleva a la partícula llegar a la placa de la derecha: $x(t_1) = d$

$$\text{Sustituyendo esto en (2)} \rightarrow \frac{qV_0}{2md} t_1^2 + u_0 t_1 = d \quad (3)$$

$$\text{De (1) para } u(t_1) = u_1 \rightarrow \frac{qV_0}{md} t_1 + u_0 = u_1 \rightarrow t_1 = \frac{md}{qV_0} (u_1 - u_0) \quad (4)$$

$$\text{Sustituyendo } t_1 \text{ en (3) y operando} \rightarrow \boxed{u_1 = \sqrt{u_0^2 + 2 \left(\frac{qV_0}{m} \right)}} \quad (5)$$

En la región con campo magnético \mathbf{B} , por la segunda ley de Newton:

$$ma_c = qu_1 B, \text{ siendo } a_c = \frac{u_1^2}{r} \text{ (aceleración centrípeta) y } r \text{ el radio de la}$$

$$\text{semi-circunferencia que describe la partícula} \rightarrow \boxed{r = \frac{mu_1}{qB}} \quad (6)$$

Sea t_B el tiempo que pasa la partícula en la región con campo, entonces como \mathbf{B} no cambia el módulo de \mathbf{u}_1 y la partícula recorre una semicircunferencia:

$$u_1 = \frac{\pi r}{t_B} \rightarrow \boxed{t_B = \frac{\pi r}{u_1} = \frac{m\pi}{qB}} \quad (7), \text{ independiente de } u_1.$$

$$\text{b) } V(t) = V_0 \cos(2\pi f t).$$

Se quiere que cuando la partícula vuelva a ingresar a la región entre las placas, sea acelerada hacia la otra placa. Entonces $V(t)$ debe cambiar su polaridad con frecuencia f tal que:

$$\text{Si } V(t_1) = V_0 \rightarrow V(t_1 + t_B) = -V_0.$$

Ahora como $t_1 \ll t_B$ ($t_1 + t_B \approx t_B$) la condición resulta

$$V(t_B) = -V_0 \rightarrow \cos(2\pi f t_B) = -1 \rightarrow 2\pi f t_B = (2n+1)\pi \rightarrow f_n = \frac{(2n+1)\pi}{2\pi t_B}, n=0,1,2,\dots$$

$$\text{La mínima frecuencia corresponde a } n=0: \boxed{f_0 = \frac{\pi}{2\pi t_B} = \frac{qB}{2m\pi}}$$

c) Para este dispositivo $r \leq r_{\text{máx}}$. Como de (6) $r = \frac{mu}{qB} \rightarrow u_{\text{máx}} = \frac{qBr_{\text{máx}}}{m}$

Entonces
$$K_{\text{máx}} = \frac{1}{2} mu_{\text{máx}}^2 = \frac{(qBr_{\text{máx}})^2}{2m}$$

Problema 3

(a) **Rotor:** Por la ecuación de Ampère-Maxwell sabemos que

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.1)$$

En esta situación no hay ni corrientes libres ni fuentes de campo eléctrico (ni desplazamiento):

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= 0 \\ \mathbf{D} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

y por lo tanto

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = 0 \quad (1.3)$$

Como consecuencia de esto, podemos afirmar que \mathbf{H} deriva de un gradiente:

$$\mathbf{H} = -\nabla \psi \quad (1.4)$$

Divergencia: Por las ecuaciones de Maxwell sabemos que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

El valor de la magnetización es

$$\mathbf{M}(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} M \hat{\mathbf{k}}, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (1.5)$$

y por lo tanto la divergencia es $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ tanto para $r < a$ como para $r > a$.

Por definición $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$ por lo que su divergencia es

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (1.6)$$

Esto último, combinado con (1.4), significa que se satisface la ecuación de Laplace para el potencial magnetostático

$$\nabla \cdot \nabla \psi \equiv \nabla^2 \psi = 0 \quad (1.7)$$

en las regiones $r < a$ y $r > a$.

(b) El campo \mathbf{H} puede tomarse como el producido por una densidad de carga magnética dada por

$$\rho_M = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (\text{volumétrica}) \quad (1.8)$$

$$\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{\text{sup.}} \quad (\text{superficial}) \quad (1.9)$$

A partir de (1.5) se encuentra directamente que

$$\rho_M(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (1.10)$$

en todo el espacio y que

$$\sigma_M(\theta, \varphi) = M \cos \theta \quad (1.11)$$

en la superficie de la esfera ($r = a$) donde $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \cos \theta$.

(c) Como el problema tiene simetría de revolución en torno al eje z , el potencial $\psi(r, \theta, \varphi)$ tiene la forma general

$$\psi(r, \theta) = \begin{cases} \psi_1(r, \theta) = A_0 + \frac{C_0}{r} + \left(A_1 r + \frac{C_1}{r^2} \right) \cos \theta + \dots & \text{si } r < a \\ \psi_2(r, \theta) = A'_0 + \frac{C'_0}{r} + \left(A'_1 r + \frac{C'_1}{r^2} \right) \cos \theta + \dots & \text{si } r > a \end{cases} \quad (1.12)$$

donde distinguimos las regiones interior (1) y exterior (2) de la esfera.

Los coeficientes A_n, C_n, A'_n, C'_n se determinan por las *condiciones de borde*.

Es sencillo concluir que $C_0 = C'_0 = 0$: de $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ sabemos que no pueden haber fuentes monopoles para el campo.

Hay una densidad de carga magnética en la superficie de la esfera (que es la frontera que separa ψ_1 y ψ_2) lo cual da lugar a una discontinuidad de la componente normal del campo \mathbf{H} :

$$\sigma_M(\theta) = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} \Big|_{r=a} = - \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial r} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right)_{r=a} \quad (1.13)$$

Esto conduce a

$$A_1 - 2 \frac{C_1}{a^3} - A'_1 + 2 \frac{C'_1}{a^3} = M \quad (1.14)$$

y además a que no hay más términos que los mostrados en (1.12) para ψ (los puntos suspensivos son todos términos nulos); (1.13) debe ser válido para todos los valores de θ . Para tener un potencial no-divergente en el origen debemos tener

$$\underline{C_1 = 0} \quad (1.15)$$

y para que sea no-divergente para $r \gg a$ debemos tener

$$\underline{A'_1 = 0} \quad (1.16)$$

Finalmente exigimos que el potencial sea continuo en todo el espacio, y en particular en la superficie de la esfera:

$$\psi_1(r, \theta)_{r=a} = \psi_2(r, \theta)_{r=a} \quad (1.17)$$

Por un lado esto nos da que $A_0 = A'_0$; elegimos $A_0 = A'_0 = 0$ por simplicidad (aunque esto no es particularmente importante: el campo magnético es independiente de estos coeficientes).

Por otro lado, del término con $\cos \theta$, tenemos la ecuación

$$A_1 a = \frac{C'_1}{a^2} \quad (1.18)$$

que junto con (1.14) nos permite despejar los coeficientes restantes:

$$A_1 = \frac{M}{3}, \quad C'_1 = \frac{a^3 M}{3} \quad (1.19)$$

Por lo tanto, el potencial ψ es

$$\psi(r, \theta) = \begin{cases} \frac{M}{3} r \cos \theta = \frac{M}{3} z, & r < a \\ \frac{M}{3} \frac{a^3}{r^2} \cos \theta, & r > a \end{cases} \quad (1.20)$$

y el campo correspondiente $\mathbf{H} = -\nabla \psi$ es

$$\mathbf{H} = \begin{cases} -\frac{M}{3} \hat{\mathbf{k}} & r < a \\ \frac{M}{3} \frac{a^3}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta) & r > a \end{cases} \quad (1.21)$$

La inducción magnética dada por $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ es

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 \frac{2M}{3} \hat{\mathbf{k}} & r < a \\ \mu_0 \frac{M}{3} \frac{a^3}{r^3} (3 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \hat{\mathbf{k}}) & r > a \end{cases} \quad (1.22)$$

(usando $\hat{\mathbf{k}} = \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$)

(d) El campo de esta parte puede obtenerse por la superposición de los campos debido a una esfera A de radio $R_A = a$ y magnetización $\mathbf{M}_A = M \hat{\mathbf{k}}$ y el debido a una esfera de radio $R_B = a/2$ y magnetización $\mathbf{M}_B = -2M \hat{\mathbf{k}}$.

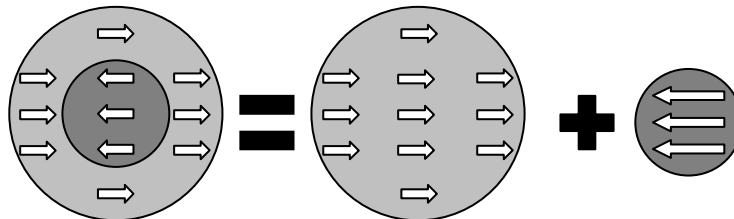


Figura 1: Superposición

El campo se divide en tres casos. Limitándonos al eje z ($\theta = 0$):

- Para $r < R_B$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{M}{3} \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{B} &= -\frac{5\mu_0 M}{3} \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (1.23)$$

- Para $R_B < r < R_A$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \left(-1 - \frac{4R_B^3}{r^3} \right) \frac{M}{3} \hat{\mathbf{k}} = -\left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right) \frac{M}{3} \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \left(2 - \frac{a^3}{2r^3} \right) \frac{M}{3} \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (1.24)$$

- Para $r > R_A$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= 2 \left(\frac{R_B^3 - 2R_A^3}{r^3} \right) \frac{M}{3} \hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} M \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{2} \mu_0 \frac{a^3}{r^3} M \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (1.25)$$