Examen de electromagnetismo julio/2007

- Solución -

Ejercicio 1.

a) Por la simetría del problema, el campo eléctrico es normal a las placas, con sentido hacia la derecha. Considerando una caja de pastillas con base paralela a las placas, el flujo del desplazamiento queda:

$$\Phi_D = sD = Q_L = \sigma_L s$$

Siendo s el área de la base de la caja de píldoras.

$$\mathbf{D}_0 = \sigma_L \hat{k} \qquad \mathbf{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D}_0 = \frac{\sigma_L}{\varepsilon}\hat{k}$$

Por tratarse de un conductor lineal, $\mathbf{J}_0 = g\mathbf{E}_0$. Toda la corriente que llega a una placa debe ser igual al flujo de corriente que sale de ella:

$$I = \int_A \mathbf{J}_0 \cdot d\hat{n} = J_0 \pi R^2 = \frac{g}{\varepsilon}\pi R^2 \sigma_L$$

con lo cual se obtiene finalmente:

$$\sigma_L = \frac{\varepsilon}{g}\frac{I}{\pi R^2} \qquad \mathbf{E}_0 = \frac{I}{g\pi R^2}\hat{k}$$

b) Se aplica la ecuación de Laplace al potencial para las regiones (I) interior y (II) exterior de la esfera:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi_I = 0, & \mathbf{E}_I = -\nabla \varphi_I \quad r < a \\ \nabla^2 \varphi_{II} = 0, & \mathbf{E}_{II} = -\nabla \varphi_{II} \quad r > a \end{cases}$$

Como el problema tiene simetría azimutal, las soluciones se plantean como

$$\varphi_I(r,\theta) = A_0 + \frac{B_0}{r} + \left(A_1 r + \frac{B_1}{r^2} \right)\cos\theta$$

$$\varphi_{II}(r,\theta) = A_0' + \frac{B_0'}{r} + \left(A_1' r + \frac{B_1'}{r^2} \right)\cos\theta$$

- El potencial debe ser finito dentro de la esfera (no hay cargas puntuales, dipolos, etc.). Por lo tanto $B_0 = 0$, $B_1 = 0$.
- Como no hay carga neta en la esfera se puede concluir que $B_0' = 0$.
- Para $r >> a$, el potencial se comporta como $\varphi_{II}(r,\theta) \approx A_0' + A_1' r\cos\theta$, que debe corresponderse con el que está asociado al campo aplicado $\mathbf{E}_0 = E_0\hat{k}$. Esto implica $A_1' = -E_0$.
- El potencial debe ser continuo al pasar de la región (I) a la región (II). Por lo tanto

  $$\varphi_I(a,\theta) = \varphi_{II}(a,\theta) \Leftrightarrow A_0 + A_1 a\cos\theta = A_0' + \left(A_1' a + \frac{B_1'}{a^2} \right)\cos\theta$$

  Puesto que esta relación debe cumplirse siempre, $A_0 = A_0'$ y $A_1 a = A_1' a + B_1'/a^2$.

- Como la esfera es conductora y el sistema está en régimen estacionario, el potencial en ella es constante. Poniendo $\varphi_I(a,\theta)=\varphi_{II}(a,\theta)=\text{cte.}$, los coeficientes que multiplican al $\cos\theta$ deben anularse: $A_1=0$, $B_1'=-a^3A_1'=a^3E_0$

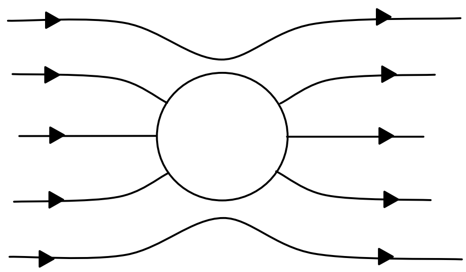
Finalmente, el potencial resulta:

$$\begin{cases}\varphi_I(r,\theta)=A_0 & r<a\\ \varphi_{II}(r,\theta)=A_0+\left(\dfrac{a^3}{r^2}E_0-E_0r\right)\cos\theta & r>a\end{cases}$$

y el campo eléctrico (tomando $-\nabla$):

$$\begin{cases}\mathbf{E}_I(r,\theta)=0 & r<a\\ \mathbf{E}_{II}(r,\theta)=\left(1+\dfrac{2a^3}{r^3}\right)E_0\cos\theta\hat{e}_r+\left(1-\dfrac{a^3}{r^3}\right)E_0\text{sen}\theta\hat{e}_\theta & r>a\end{cases}$$

$\mathbf{J}=g\mathbf{E}$, las líneas de corriente quedan:



c) Densidad de carga libre:

$$\sigma_L=(\varepsilon\mathbf{E}_{II}-\varepsilon_0\mathbf{E}_I)\cdot\hat{n}=\varepsilon E_0\cos\theta\left(1+\frac{2a^3}{r^3}\right)$$

$$=3\varepsilon E_0\cos\theta=\frac{3\varepsilon I}{g\pi R^2}\cos\theta$$

donde hay que recordar que se evalúa en $r=a$ y que $\hat{n}=\hat{e}_r$.

d) La carga que atraviesa el plano ecuatorial de la esfera es toda la carga que está llegando a su hemisferio izquierdo:

$$I=-\int_{\substack{\text{hemisferio}\\ \text{izquierdo}}}\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}=-g\int_{\text{h.izq.}}\mathbf{E}_{II}\cdot\hat{n}dA=-\frac{g}{\varepsilon}\int_{\text{h.izq.}}\sigma_L dA$$

(usando la relación entre la densidad de corriente y el campo, y entre el campo y la densidad superficial de carga). Planteando la integral en coordenadas esféricas (para considerar el hemisferio izquierdo el ángulo θ debe recorrer el intervalo $[\pi/2,\pi]$):

$$I=-\frac{g}{\varepsilon}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\pi/2}^{\pi}d\theta a^2\sin\theta\left(3\varepsilon E_0\cos\theta\right)=-6\pi a^2gE_0\left\{\left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_{\pi/2}^{\pi}\right\}$$

$$=3\pi a^2gE_0=\frac{3a^2I}{R^2}$$

Ejercicio 2.

a) Aplicando la ley de Ampère: $\oint_C \vec{H}.d\vec{l} = I$, siendo C una circunferencia de radio r $(a \le r \le 2a)$, tenemos que $H_2 2\pi r = I$. Dado *I*, el radio de saturación es: $r_{sat} = \dfrac{I}{2\pi H_{sat}}$

Material completamente sin saturar: $r_{sat} \le a \Leftrightarrow I \le 2\pi a H_{sat}$ $\boxed{I_0 \equiv 2\pi a H_{sat}}$

b) $i_1(t) = I_0\left(1 - t/\tau\right)$. Cuando se cierra la llave S, la ecuación para el circuito es:

$$\varepsilon - R i_2(t) = 0 \quad \text{donde } \varepsilon = -N\frac{d\Phi_1}{dt}.$$

El campo magnético total en el material: $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_1(\vec{r},t) + \vec{B}_2(\vec{r},t)$, puede hallarse como la superposición de: 1) el campo $\vec{B}_1$ debido a la corriente $i_1(t)$ que circula por el conductor filiforme y 2) el campo $\vec{B}_2$ debido a la corriente $i_2(t)$ inducida en la bobina. Para hallar el flujo del campo magnético total $\vec{B}(\vec{r},t)$ a través de una sola vuelta (Φ_1), primero calculamos el flujo del mismo a través de una tirilla de alto a y ancho dr, a distancia r del centro y luego integramos en r con $a \le r \le 2a$:

$$\Phi_1(t) = \int_S \vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S} = \int_a^{2a} \left[\vec{B}_1(\vec{r},t) + \vec{B}_2(\vec{r},t)\right]\cdot\left(a\, dr\, \hat{e}_\varphi\right)$$

Como el material está completamente sin saturar: $B = \mu H$ ($\mu = \dfrac{B_{sat}}{H_{sat}}$).

Aplicando la ley de Ampère : $\vec{B}_1(\vec{r},t) = \dfrac{\mu i_1}{2\pi r}\hat{e}_\varphi$ y $\vec{B}_2(\vec{r},t) = \dfrac{\mu N i_2}{2\pi r}\hat{e}_\varphi$. Entonces:

$\Phi_1(t) = \displaystyle\int_a^{2a} a\, dr \left[\frac{\mu i_1}{2\pi r} + \frac{\mu N i_2}{2\pi r}\right]$ Luego: $\boxed{\Phi = N\Phi_1(t) = \dfrac{\mu N a}{2\pi}(ln 2)\left[i_1(t) + N i_2(t)\right]}$

c) $$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{\mu a}{2\pi}(ln 2)\left[\frac{di_1}{dt} + N\frac{di_2}{dt}\right] = \frac{\mu a}{2\pi}(ln 2)\left[-\frac{I_0}{\tau} + N\frac{di_2}{dt}\right]$$

Sustituyendo en la ecuación del circuito: $-\dfrac{N\mu a\, ln 2}{2\pi}\left[-\dfrac{I_0}{\tau} + N\dfrac{di_2}{dt}\right] - Ri_2 = 0$

Definiendo $\boxed{\alpha = \dfrac{2\pi R}{\mu a (ln 2) N^2}, \quad \beta = \dfrac{I_0}{N\tau}}$, llegamos a: $\dfrac{di_2}{dt} + \alpha i_2 - \beta = 0$

Su solución puede hallarse a partir de la solución de la homogénea y de una particular:

$i_2(t) = i_{2(h)}(t) + i_{2(p)}(t) = we^{-\alpha t} + \dfrac{\beta}{\alpha}$

Junto con la C.I.: $i_2(0)=0$. Obtenemos finalmente: $\boxed{i_2(t) = \dfrac{\beta}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)}$

Ejercicio 3.

a) En la fuente: $\mathrm{v}(t) = V_0 \mathrm{sen}(\omega t) = \mathrm{Re}[V_0 e^{j(\omega t - \pi/2)}] = \mathrm{Re}[-jV_0 e^{j\omega t}]$, en régimen la corriente i_1 puede escribirse: $i_1(t) = \mathrm{Re}[I_1 e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[|I_1| e^{j\phi} e^{j\omega t}]$

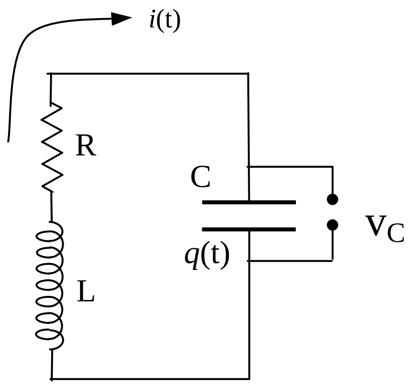
$\Rightarrow$

$$-jV_0 - RI_1 - j\omega L_1 I_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{-jV_0}{R + j\omega L} = \frac{V_0}{R^2 + \omega^2 L^2}\left(-jR - \omega L\right), \quad \tan(\phi) = \frac{R}{\omega L}.$$

$$\left.\begin{array}{l} V_1(t) = RI_1(t) = R|I_1| e^{j(\omega t + \phi)} \\ V_2(t) = -j\omega L I_1(t) = \omega L |I_1| e^{j(\omega t + \phi - \pi/2)} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\mathrm{V}_1 = R|I_1| \\ \sqrt{2}\mathrm{V}_2 = \omega L |I_1| \end{cases} \therefore \begin{cases} \boxed{|I_1| = \sqrt{2}\,\dfrac{\mathrm{V}_1}{R}} \\ \tan(\phi) = \dfrac{R}{\omega L} = \dfrac{\mathrm{V}_1}{\mathrm{V}_2} \end{cases}$$

El desfasaje respecto a v(t) es: $\boxed{\phi_1 = (\omega t + \phi) - (\omega t - \pi/2) = \phi + \pi/2}$; la tangente es:

$\tan(\phi_1) = -\dfrac{1}{\tan(\phi)} = -\dfrac{\mathrm{V}_2}{\mathrm{V}_1}$; ($\phi_1 < 0$ porque la rama es inductiva).



b) En el capacitor: $\mathrm{v}_C(t) = \dfrac{q(t)}{C}$

La ecuación de mallas aplicada al circuito para t > 0 es:

$\dfrac{q(t)}{C} - L\dfrac{di}{dt} - Ri = 0$. Según la figura: $i = -\dot{q}$

$\Rightarrow \quad -L\ddot{q} - R\dot{q} - \dfrac{1}{C}q = 0$.

La ecuación característica es: $-L\alpha^2 - R\alpha - \dfrac{1}{C} = 0$

$$\alpha_\pm = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2L}\sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}} = -\frac{R}{2L}\left(1 \pm i\sqrt{31}\right) \qquad \Rightarrow \qquad q(t) = Ae^{\alpha_+ t} + Be^{\alpha_- t}$$

En t = 0, la corriente por L y la carga son las correspondientes del circuito con S cerrado:

1) $q(0) = C\mathrm{v}_C(t) = C\mathrm{v}(0) = 0$ 2) $i(0) = i_1(0) = |I_1|\cos\phi = -\dot{q}(0)$

De 1): $A + B = 0 \;\rightarrow\; q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} A\left(e^{i\frac{R}{2L}\sqrt{31}t} - e^{-i\frac{R}{2L}\sqrt{31}t}\right) = iAe^{-\frac{R}{2L}t}\mathrm{sen}\left(\dfrac{R}{2L}\sqrt{31}t\right)$

De 2): $-|I_1|\cos\phi = iA\dfrac{R}{2L}\sqrt{31} \quad \therefore \quad \boxed{q(t) = -\dfrac{2L|I_1|\cos\phi}{\sqrt{31}R}\, e^{-\frac{R}{2L}t}\mathrm{sen}\left(\dfrac{R}{2L}\sqrt{31}t\right)}$

c) La energía disipada será la energía almacenada en L y C en t = 0:

$$E = \frac{q^2(0)}{2C} + \frac{1}{2}Li^2(0) = \frac{1}{2}L|I_1|^2\cos^2(\phi).$$