# Electromagnetismo
# Curso 2008
# Solución del examen de febrero

**Problema 1**

**a)** Dada la simetría del problema y despreciando efectos de borde, se puede suponer que el campo eléctrico es uniforme entre las placas y en la dirección de $\hat{z}$ , donde z crece al ir de la placa de mayor potencial a la de menor potencial (de izquierda a derecha en la figura del problema).

Entonces $V = \int_0^L \vec{E} \cdot \hat{z}\, dl = E\, L \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \frac{V}{L}\hat{z}}$

**b)** La conservación de la carga conduce a la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Como el sistema se encuentra en estado estacionario $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ y por tanto $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ en todos los puntos interiores del dispositivo.
Considerando el flujo a través de una superficie con forma de cajita de pastillas infinitesimal en la interfase entre la cavidad (región I) y el medio resistivo (región II) y usando el teorema de la divergencia, tenemos
$\vec{J}_I \cdot \hat{n}\big|_{r=a} = \vec{J}_{II} \cdot \hat{n}\big|_{r=a} \quad \rightarrow \quad 0 = \vec{J}_{II} \cdot \hat{n}\big|_{r=a}$ ya que en la cavidad no hay corriente, $\vec{J}_I = 0$.
Por tratarse de un medio óhmico, la densidad de corriente y el campo eléctrico son proporcionales, $\vec{J} = g\vec{E}$ , y por lo tanto

$$\boxed{\vec{E}_{II} \cdot \hat{n}\big|_{r=a} = 0}$$

A partir de $\nabla \times \vec{E} = 0$ y aplicando el teorema del rotor a una curva infinitesimal de forma rectangular en la interfase concluimos que la componente tangencial del campo eléctrico debe ser continua:

$$\boxed{E_{I,t} = E_{II,t}}$$

**c)** En el estado estacionario $\rho = 0$ y la ecuación de Laplace es aplicable al potencial para las regiones I (interior de la cavidad) y II (medio resistivo):

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_I = 0 \quad \text{siendo} \quad \vec{E}_I = -\nabla \phi_I, \quad r < a \\ \nabla^2 \phi_{II} = 0 \quad \text{siendo} \quad \vec{E}_{II} = -\nabla \phi_{II}, \quad r > a \end{cases}$$

Elegimos trabajar en coordenadas esféricas $(r, \theta, \phi)$ con origen en el centro de la cavidad y el eje principal en la dirección que va de la placa de mayor potencial a la de menor potencial (eje $\hat{z}$ de la parte anterior). El problema tiene simetría de revolución en torno a este eje, por lo que los potenciales no van a depender de la coordenada $\phi$. Como solución para el potencial proponemos entonces

$$\begin{cases} \phi_I(r,\theta) = A_0 + \dfrac{C_0}{r} + \left(A_1 r + \dfrac{C_1}{r^2}\right)\cos\theta \\ \phi_{II}(r,\theta) = A_0^{'} + \dfrac{C_0^{'}}{r} + \left(A_1^{'} r + \dfrac{C_1^{'}}{r^2}\right)\cos\theta \end{cases}$$

Para determinar las constantes del potencial, tomamos en cuenta las condiciones de borde siguientes:

- Cerca del centro de la cavidad, cuando $r << a$, el potencial debe permanecer acotado, $\phi_I(r,\theta) < \infty$, porque no hay cargas puntuales, dipolos, etc. Entonces necesariamente $C_0$=0 y $C_1$=0.
- Como se anula la componente normal a la superficie de la cavidad del campo eléctrico, $\vec{E}_{II} \cdot \hat{n}\big|_{r=a} = 0$, el flujo de $\vec{E}$ a través de una superficie esférica de radio *a* debe ser cero. Esto implica que la que la carga neta encerrada es cero, lo cual solo es posible si $C_0^{'} = 0$.
- Lejos de la cavidad, cuando $r >> a$, el campo debe ser esencialmente el campo original (sin la cavidad), $\vec{E}_{II} \approx \dfrac{V}{L}\hat{z}$. En este límite $\dfrac{V}{L} = -\dfrac{\partial \varphi_{II}}{\partial z}$, observando que $z = r\cos\theta$ y que $\phi_{II} = A_0^{'} + A_1^{'} r\cos\theta$, se tiene que $A_1^{'} = -\dfrac{V}{L}$
- En la superficie de la cavidad $E_{II} \cdot \hat{r}\big|_{r=a} = \dfrac{\partial \phi_{II}}{\partial r}\bigg|_{r=a} = 0 \rightarrow$

  $$\left(-\frac{V}{L} - \frac{2C_1^{'}}{a^3}\right)\cos\theta = 0$$

  (válido para todo $\theta$). En consecuencia, $C_1^{'} = -\dfrac{V}{L}\dfrac{a^3}{2}$
- El potencial debe ser continuo al pasar de un medio al otro:

  $$\phi_I\big|_{r=a} = A_0 + A_1 a\cos\theta = A_0^{'} + \left(-\frac{V}{L}a + \frac{C_1^{'}}{a^2}\right)\cos\theta = \phi_{II}\big|_{r=a}$$

  La igualdad es válida para todo $\theta$ solamente si

  $$\begin{cases} A_0 = A_0^{'} \\ A_1 a = -\dfrac{V}{L}a + \dfrac{C_1^{'}}{a^2} \end{cases}$$

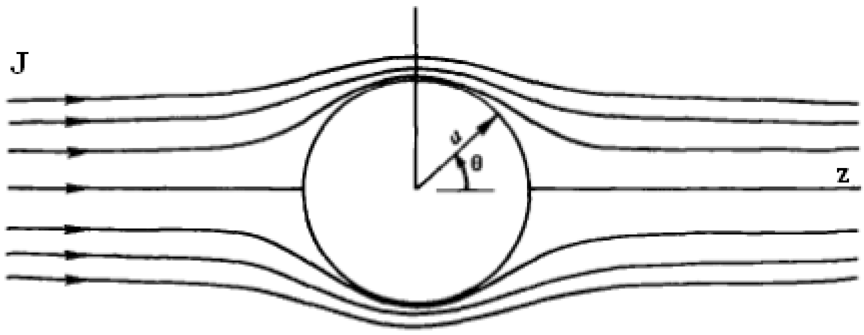
  Usando el valor ya determinado de $C_1^{'}$ resulta $A_1 = -\dfrac{3}{2}\dfrac{V}{L}$.

Entonces a partir de lo anterior el potencial queda definido (a menos de una constante) y podemos determinar el campo eléctrico mediante el gradiente:

$$\begin{cases} \phi_I(r,\theta) = A_0 - \dfrac{3}{2}\dfrac{V}{L} r\cos\theta = A_0 - \dfrac{3}{2}\dfrac{V}{L} z, \quad r < a \\ \phi_{II}(r,\theta) = A_0' - \dfrac{V}{L}\left(r + \dfrac{a^3}{2r^2}\right)\cos\theta, \quad r > a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \vec{E}_I = -\nabla\phi_I = \dfrac{3}{2}\dfrac{V}{L}\hat{z}, \quad r < a \\ \vec{E}_{II} = -\nabla\phi_{II} = \dfrac{V}{L}\hat{z} - \dfrac{1}{2}\dfrac{V}{L}\left(\dfrac{a}{r}\right)^3 \left(2\cos\theta\,\hat{r} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\theta}\right), \quad r > a \end{cases}}$$

Bosquejo de líneas de corriente (líneas del campo $\vec{J}$) en torno a la cavidad:




(conviene recordar que las componentes normales de la corriente se anulan en la superficie, por lo que las líneas pasan tangentes a ella).

**d)** Densidad de carga libre y de polarización en la superficie de la cavidad ($r = a$):

$$\sigma_L(\theta) = \vec{D}_{II}\cdot\hat{r}\Big|_{r=a} - \vec{D}_I\cdot\hat{r}\Big|_{r=a} = \varepsilon\,\vec{E}_{II}\cdot\hat{r}\Big|_{r=a} - \varepsilon_0\,\vec{E}_I\cdot\hat{r}\Big|_{r=a} = -\varepsilon_0\frac{3}{2}\frac{V}{L}\hat{z}\cdot\hat{r}$$

$$\rightarrow \boxed{\sigma_L(\theta) = -\frac{3}{2}\varepsilon_0\frac{V}{L}\cos\theta}$$

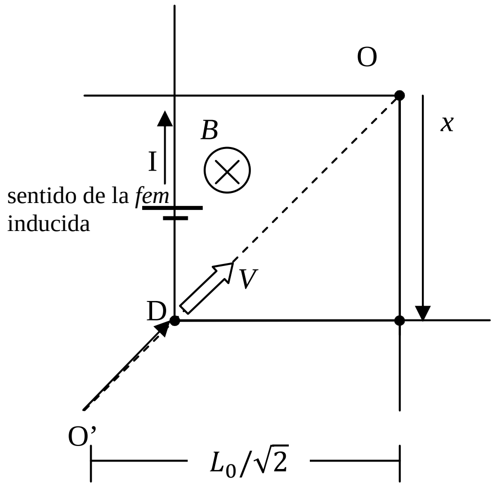
$\sigma_P(\theta) = \vec{P}_{II}\cdot(-\hat{r})\Big|_{r=a}$ ,donde $-\hat{r}$ es la normal saliente al medio con permitividad $\varepsilon$

Ahora $\vec{D}_{II} \equiv \varepsilon_0\vec{E}_{II} + \vec{P}_{II}$ y en este caso $\vec{D}_{II} \equiv \varepsilon\vec{E}_{II}$. Entonces $\vec{P}_{II} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_{II}$

Entonces $\sigma_P = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_{II}\cdot(-\hat{r})\Big|_{r=a} = 0$ (por la parte (b) )$\rightarrow$ $\boxed{\sigma_P = 0}$

**Problema 2**

**a)** Aplicamos la ley de Faraday para hallar la *fem* inducida,




$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Sea $x$ el largo del lado de la espira cuadrada en un tiempo $t$. El área de la espira es $A = x^2$ y la *fem* resulta (usando un vector $\hat{n}$ en el sentido de $\vec{B}$)

$$\mathcal{E} = -\frac{d(BA)}{dt} = -\frac{d(Bx^2)}{dt} = -2Bx\frac{dx}{dt}.$$

La longitud de la diagonal $L$ vale $L = \sqrt{2}x$, y por lo tanto

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{V}{\sqrt{2}}$$

donde $V$ es la velocidad de la esquina. Siendo la resistencia de los conductores $R = 4\lambda x$, la corriente inducida es

$$\boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BV}{2\sqrt{2}\lambda}}$$

en el sentido indicado en la figura. Observemos que la corriente inducida no varía con el tiempo.

**b)** El módulo de las fuerzas sobre cada sección del alambre móvil vale

$$F^{(B)} = IxB = \frac{ILB}{\sqrt{2}}$$

y apuntan en dirección perpendicular a cada tramo, hacia fuera del cuadrado que estos forman. El módulo de la fuerza total magnética sobre el alambre móvil es (suma vectorial de las anteriores)

$$F = \sqrt{2}F^{(B)} = ILB,$$

en dirección opuesta a la velocidad $V$.

Un agente externo debe ejercer una fuerza opuesta a la fuerza magnética para poder llevar el alambre móvil entre O' y O a velocidad constante, realizando en el proceso un trabajo dado por

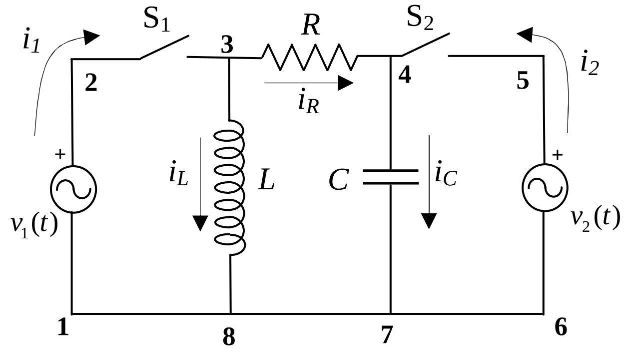
$$W^{(\mathrm{ext})} = \int_0^{L_0} F^{(ext)}\, dL = IB\int_0^{L_0} L dL = \boxed{\frac{B^2VL_0^2}{4\sqrt{2}\lambda}}$$

**Problema 3**

**a)** $v_1(t) = V_0\cos(\omega t) = \mathrm{Re}[V_0 e^{j\omega t}] \Rightarrow \boxed{V_1(t) = V_0 e^{j\omega t}}$

$v_2(t) = V_0\cos(\omega t - \pi/2) = \mathrm{Re}[V_0 e^{j(\omega t-\pi/2)}]$ y $e^{-j\pi/2} = -j \Rightarrow \boxed{V_2(t) = -jV_0 e^{j\omega t}}$

**b)** *Mallas*:
(las letras mayúsculas corresponden a la amplitud compleja de la cantidad física correspondiente en minúsculas)




**1238**: $V_0 - j\omega L\, I_L = 0$ (1)

**1256**: $V_0 - R\, I_R - (-jV_0) = 0$ (2)

**6547**: $-jV_0 - \dfrac{1}{j\omega C} I_C = 0$ (3)

*Nodos*:

**3**: $I_1 = I_L + I_R$ (4)

**4**: $I_2 = I_C - I_R$ (5)

(1): $I_L = \dfrac{V_0}{j\omega L} = -\dfrac{jV_0}{\omega L}$ (2): $\dfrac{V_0}{R}(1+j) = I_R$ (3): $I_C = \omega C V_0$

Deducimos que:

$$i_L(t) = \mathrm{Re}[I_L e^{j\omega t}] \Rightarrow \boxed{i_L(t) = \frac{V_0}{\omega L}\cos(\omega t - \pi/2)}$$

$$i_C(t) = \mathrm{Re}[I_C e^{j\omega t}] \Rightarrow \boxed{i_C(t) = \omega C V_0 \cos(\omega t)}$$

$$i_R(t) = \mathrm{Re}[I_R e^{j\omega t}] \Rightarrow \boxed{i_R(t) = \frac{V_0}{R}\sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/4)}$$

Por último,

$$I_1 = \frac{V_0}{R}\left[1 + \left(1 - \frac{R}{\omega L}\right) j\right] \Rightarrow |I_1| = \frac{V_0}{R}\sqrt{1 + \left(1 - \frac{R}{\omega L}\right)^2}\ ,\ Arg(I_1) = \varphi_1 = \arctan\left(1 - R/\omega L\right)\ ,$$

$$\boxed{i_1(t) = \mathrm{Re}[I_1 e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}\left[|I_1| e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}\right] = |I_1|\cos(\omega t + \varphi_1)}$$

$$I_2 = \frac{V_0}{R}\left[(\omega RC - 1) - j\right] \Rightarrow \ |I_2| = \frac{V_0}{R}\sqrt{(\omega RC-1)^2 + 1}, \qquad Arg(I_2) = \arctan\left(\frac{1}{1-\omega RC}\right),$$

$$\boxed{i_2(t) = \mathrm{Re}[I_2 e^{j\omega t}] = |I_2|\cos(\omega t + \varphi_2)}$$

**c)** La energía que se disipará en la malla central es la energía que está almacenada en la bobina y en el capacitor en $t = 0$. Al abrir las llaves la corriente en la malla es $i_L(0)$ (la bobina impide una discontinuidad en la corriente que pasa por ella) y la carga en el condensador es $q_C(0)$ (su carga no puede cambiar abruptamente).

$$E_{\text{dis.}} = \frac{1}{2} L i_L^2 (t=0) + \frac{1}{2}\frac{q_C^2}{C}(t=0)$$

De la parte (a) antes de abrir las llaves: $i_L(t) = \frac{V_0}{\omega L}\cos(\omega t - \pi/2) \Rightarrow i_L(t=0) = 0$

$$q_C = v_C / C;\ v_C(t) = v_2(t) = V_0 \cos(\omega t - \pi/2) \Rightarrow v_C(t=0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{\text{dis.}} = 0}$$

**d)** Si los interruptores se abren en un instante cualquiera *t*:

$$E_{\text{dis.}} = \frac{1}{2} L \left(\frac{V_0}{\omega L}\right)^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} C V_0^2 \sin^2 \omega t$$

La energía disipada será máxima cuando $\sin^2 \omega t = 1$, o sea para cualquier tiempo $t_n$ tal que $\boxed{t_n = (2n+1)\frac{\pi}{2\omega}}$, $n = 0, 1, 2, ...$

Para $t = t_n$ se tiene que $E_{\text{dis.}} = \frac{V_0^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2 L} + C\right)$.