ELECTROMAGNETISMO

Examen Febrero 2008. Solución

Problema 1.

a) El campo se obtiene por integración directa: $\vec{E}(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\hat{k}$

b) A partir del campo se puede calcular la diferencia de potencial para dos puntos sobre el eje z:

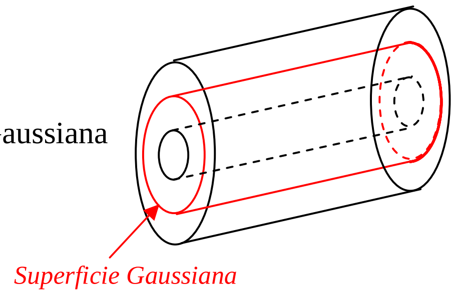
$$\varphi(0)-\varphi(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{z^2+a^2}-a)$$

Para que la partícula no llegue a $z = 0$ su energía cinética debe ser menor que la variación de energía potencial:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 < q[\varphi(0)-\varphi(z)] \quad \text{o sea} \quad v_0^2 < \frac{q\sigma}{m\varepsilon_0}(\sqrt{z^2+a^2}-a)$$

esta condición no se cumple nunca si el plano y la partícula tienen cargas de signo opuesto.

Problema 2.



a) Para hallar el campo eléctrico utilizamos una superficie Gaussiana cilíndrica de radio r con $a<r<b$:

$$\oint_S \vec{D}.\vec{dA} = \varepsilon E 2\pi r L = q \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{q}{2\pi r\varepsilon L}\widehat{e_\rho}$$

En términos del potencial V dado:

$$\int_a^b \vec{E}.\vec{dl} = -\int_{\Phi_a}^{\Phi_b} d\Phi = -(\Phi_b - \Phi_a) = V \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{2\pi\varepsilon L}\int_a^b \frac{dr}{r} = V$$

$$q = \frac{2\pi\varepsilon LV}{\ln(b/a)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \frac{V}{\ln(b/a)r}\widehat{e_\rho}}$$

b) Para hallar la resistencia hay que obtener la relación entre V e I_T, siendo I_T la corriente que proviene de la batería. Utilizando el campo eléctrico de la parte anterior y la ley de Ohm $\vec{J} = g\vec{E}$, se determina I_T al calcular el flujo de $\vec{J}$ a través de una superficie cilíndrica S de radio r y largo L ($a<r<b$)

$$\vec{J} = g\vec{E} = \frac{gV}{\ln(b/a)r}\widehat{e_\rho} \quad \Rightarrow \quad I_T = \int_S \vec{J}.\vec{dA} = \frac{gV}{\ln(b/a)}\int_0^L\int_0^{2\pi}\frac{\widehat{e_\rho}}{r}.\widehat{e_\rho}rd\theta dx = \frac{2\pi LgV}{\ln(b/a)}$$

Análogamente, si la superficie es un cilindro de largo x:

$$I_f(x) = \frac{gV}{\ln(b/a)}\int_0^x\int_0^{2\pi}\frac{\widehat{e_\rho}}{r}.\widehat{e_\rho}rd\theta dx = \frac{2\pi xgV}{\ln(b/a)}$$

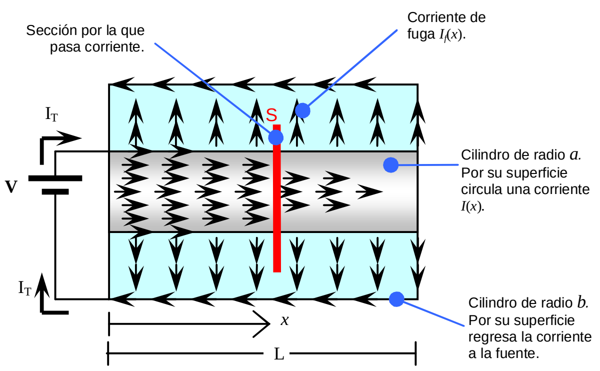
(Nótese que $I_f(x=L) = I_T$).

Finalmente, las resistencias correspondientes resultan

$$\boxed{R_L = \frac{V}{I_T} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi g L}} \quad \boxed{R_x = \frac{V}{I_f(x)} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi g x}}$$

c) De la batería llega una corriente total I_T a un extremo del cilindro interno. Parte de ésta se fuga radialmente hacia el cilindro externo (ver modelo).

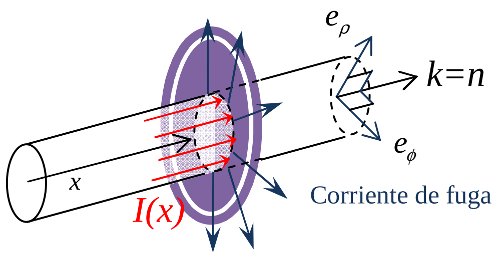
Modelo del Sistema



Esta corriente de fuga es de hecho la corriente $I_f(x)$ de la parte anterior. En un valor dado de x, la corriente axial por el cilindro de radio a estará dada por

$$I(x) = I_T - I_f(x) = I_f(L) - I_f(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I(x) = \frac{2\pi g V(L-x)}{\ln(b/a)}}$$

d) Llamemos C al anillo amperiano y A al área plana que éste delimita, situados en x, como muestra la figura. La densidad de corriente de fuga tiene dirección **perpendicular** a la la normal de A, por lo que, al no tener flujo a través de esa superficie, no contribuye a la inducción magnética que buscamos; no obstante, $I(x)$ sí lo hace.
Utilizando la ley de Ampère y la simetría cilíndrica,



$$\oint_c \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu I(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu g V L(1-x/L)}{\ln(b/a) r}\widehat{e_\varphi}}$$

e) Utilizando la definición del vector de Poynting.

$$\boxed{\overline{S} = \overline{E} \times \overline{H} = \frac{gL(1 - x/L)V^2}{\ln^2(b/a)r^2}}$$

f) La potencia P puede determinarse por el flujo del vector de Poynting. Usando la misma superficie A anterior,

$$P = \int_A \overline{S} \cdot \overline{dA} = \frac{2\pi gL(1 - x/L)V^2}{\ln(b/a)} = \frac{V^2}{R_L}(1 - x/L)$$

Problema 3.

Este problema se encuentra desarrollado en los textos de Electromagnetismo, lo que sigue es una guía del mismo. Por más detalles consultar el Reitz-Milford.

a) Para una onda plana ($\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_0 e^{i(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)} = \vec{F}_0 e^{i\vec{k}.\vec{r}} e^{-i\omega t}$) se cumple: $\vec{\nabla}.\vec{F} = i\vec{k}.\vec{F}$, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = i\vec{k} \times \vec{F}$ y $\frac{\partial}{\partial t}\vec{F} = -i\omega \vec{F}$. Entonces, a partir de las ecuaciones de Maxwell para los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$

$$\begin{cases} \nabla.\vec{D} = 0 \\ \nabla.\vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$$

obtenemos:

i) $\vec{k}.\vec{E}_0 = 0, \quad \vec{k}.\vec{B}_0 = 0, \quad \vec{E}_0.\vec{B}_0 = 0$

ii) $v = \omega / k = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

iii) $E_0 = vB_0$

b) i) Como $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ y no habiendo cargas ni corrientes, tanto E como B deben ser continuos en la interfase ($z=0$).

ii) $E_{0T} = E_{0I} \dfrac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}$ $\qquad$ $E_{0R} = E_{0I} \dfrac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}$

iii) $T = \dfrac{4\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}}{\left(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}\right)^2}$ $\qquad$ $R = \left(\dfrac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}\right)^2$

Se verifica que T+R=1.