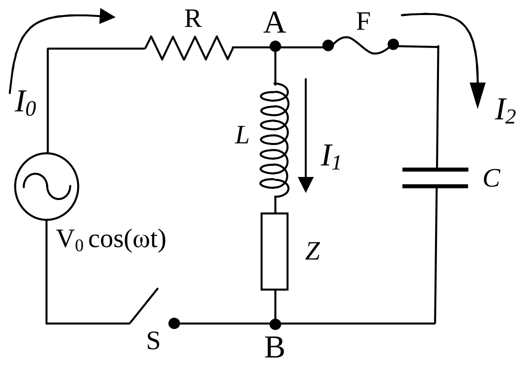
Examen de electromagnetismo febrero/2007

- Solución -

Problema 1



a) Las ecuaciones de malla y nodo para el circuito son:

$$\begin{cases} V_0 - RI_0 - (j\omega L + jX)I_1 = 0 \\ V_0 - RI_0 - \dfrac{1}{j\omega C} I_2 = 0 \end{cases} \qquad I_0 = I_1 + I_2$$

Para que la carga en C sea nula en todo instante, la diferencia de potencial entre los puntos A y B debe ser también nula en todo instante:

$$V_B - V_A = -I_1(j\omega L + jX) = 0 \quad \Rightarrow \quad X = -\omega L, \quad \boxed{Z = -j\omega L}$$

Puede obtenerse esto también imponiendo que $I_2 = 0$, porque en régimen: $q(t) = \mathrm{Re}[Q_0 e^{j\omega t}] = \mathrm{Re}[\frac{I_2}{j\omega} e^{j\omega t}]$ ($I_2 = \dot{Q}$ y se ha utilizado el hecho de que la carga *media* de C es 0 para omitir una cte. aditiva al integrar I_2).

Z es un capacitor, porque puede ponerse:

$$Z = -j\omega L = -j\frac{1}{\omega C_Z} = \frac{1}{j\omega C_Z}, \text{ con: } \omega L = \frac{1}{\omega C_Z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_Z = \frac{1}{\omega^2 L}}$$

b) En las ecuaciones de malla queda: $V_0 - RI_0 = 0 \quad \rightarrow \quad I_0 = \frac{V_0}{R}$ (el circuito es puramente resistivo).

$$I_0 = \frac{V_0}{R} \text{ es real} \quad \Rightarrow \quad i_0(t) = \mathrm{Re}[I_0 e^{j\omega t}] = \frac{V_0}{R}\cos(\omega t)$$

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

El desfasaje es nulo: $\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{P} = \frac{1}{2}V_0 I_0 = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{R} = \frac{1}{2}RI_0^2}$

c) Cuando se abre S, se tiene un circuito formado por L y los dos capacitores (C y C_Z). La corriente por L es continua, entonces la corriente en el circuito (que es la que pasa por F) es igual a la corriente por L inmediatamente antes de abrir S:

$$I(0+\varepsilon) = I_1(0-\varepsilon) = \frac{V_0}{R} \quad \text{(para Z calculado en } \textbf{a)}\text{)}$$

Para que F no se queme debe ser: $I(0 + \varepsilon) = \frac{V_0}{R} < I_m \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_0 < RI_m}$

Problema 2

a) Densidad volumétrica: $\rho_P = -\nabla.\vec{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 P_0)}{\partial r} = -\frac{2P_0}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_P(r) = -\frac{2P_0}{r}}$

Densidades superficiales: $\boxed{\begin{array}{l} \sigma_P\big|_{r=a} = \vec{P}.\hat{n} = \vec{P}.(-\hat{e}_r) = -P_0 \\ \sigma_P\big|_{r=b} = \vec{P}.\hat{n} = \vec{P}.(\hat{e}_r) = P_0 \end{array}}$

b) Por simetría: $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{A} = 4\pi D(r)$ para cualquier esfera S centrada en el origen.

No hay carga neta $\Rightarrow \; 4\pi D(r)=0 \quad \therefore \; D(r)=0 \quad \forall\, r$

$$\boxed{0<r<a \quad \text{y} \quad b<r: \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{D} = 0 \qquad a<r<b: \vec{E} = \frac{(\vec{D}-\vec{P})}{\varepsilon_0} = -\frac{P_0}{\varepsilon_0}\hat{e}_r}$$

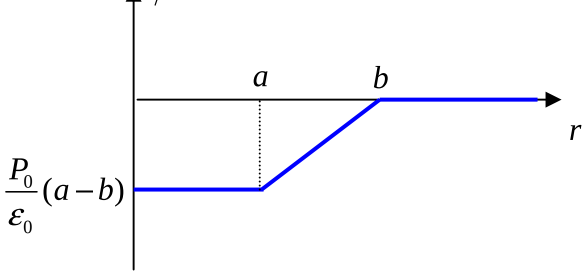
c) Para un capacitor esférico con carga Q en la placa $r = a$: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{e}_r$. Este campo tiene una dependencia $\frac{1}{r^2}$ y por tanto **no es posible** generar el campo constante $\vec{E} = -\frac{P_0}{\varepsilon_0}\hat{e}_r$.

d) Es: $\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi(r)}{\partial r}\hat{e}_r$ (si ϕ no dependiera sólo de r, $\vec{E}$ tendría también componentes según otros versores).

$$\begin{cases} 0<r<a & 0 = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_1 \;\text{(cte.)} \\ a<r<b & -\frac{P_0}{\varepsilon_0} = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{P_0}{\varepsilon_0} r + C \\ b<r & 0 = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \quad \Rightarrow \quad \phi = \phi_2 = 0 \quad \text{(porque: } 0 = \phi(\infty) = \phi_2) \end{cases}$$

Aplicando continuidad del potencial en $r = a$ y en $r = b$ para determinar ϕ_1 y C resulta:

$$\boxed{r<a: \; \phi = \frac{P_0}{\varepsilon_0}(a-b) \qquad a<r<b: \; \phi = \frac{P_0}{\varepsilon_0}(r-b) \qquad b<r: \; \phi = 0}$$



e) En este caso hay que utilizar la expresión de la energía de un sistema de cargas en función de las densidades y los potenciales:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})dV + \frac{1}{2}\int_S \sigma(\vec{r})\phi(\vec{r})ds$$

Obs: $U = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{E}(\vec{r})dV = 0$; pero esta expresión no vale aquí porque el dieléctrico no es lineal.

Utilizando los resultados anteriores para el potencial y las densidades de carga:

$$U = \frac{1}{2}\int_a^b \left(-\frac{2P_0}{r}\right)\left(\frac{P_0}{\varepsilon_0}(r-b)\right)4\pi r^2 dr \;+\; \frac{1}{2}\int_{S_a} (-P_0)\left(\frac{P_0}{\varepsilon_0}(a-b)\right)ds$$

$4\pi r^2 dr$ es el elemento de volumen radial
S_a es la esfera $r = a$, la integral de σ en S_b es 0 porque $\phi(b) = 0$.

Haciendo las integrales:

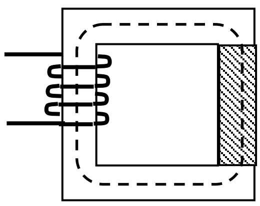
$$U = \frac{4\pi P_0^2}{\varepsilon_0}\int_a^b (b-r)rdr \;+\; \frac{P_0^2}{2\varepsilon_0}(b-a)\int_{S_a} ds = \frac{4\pi P_0^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{b}{2}(b^2-a^2) - \frac{1}{3}(b^3-a^3)\right) + \frac{P_0^2}{2\varepsilon_0}(b-a)4\pi a^2$$

$$U = \frac{2\pi P_0^2}{\varepsilon_0}\left(b^3 - ba^2 - \frac{2}{3}b^3 + \frac{2}{3}a^3 + ba^2 - a^3\right) = \frac{2\pi P_0^2}{3\varepsilon_0}(b^3 - a^3)$$

Problema 3

a) Considerando una curva cerrada dentro del núcleo (N) y el imán permanente (IP), se aplica la ley de Ampère:

$$NI = \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = H_N L + H_I l$$



donde H_N y H_I representan el campo magnético en el núcleo y en el IP respectivamente. Utilizando la conservación de flujo magnético en la unión entre el IP y el núcleo encontramos una relación sencilla entre las inducciones magnéticas:

$$\Phi_N = \Phi_I \leftrightarrow B_N a = B_I a \leftrightarrow B_N = B_I \overset{def}{=} B$$

donde hemos llamado B al valor común de la inducción magnética.

Como el núcleo es una sustancia lineal, se cumple:

$$B_N = \mu H_N$$

utilizando estas relaciones en la ecuación de Ampère llegamos a:

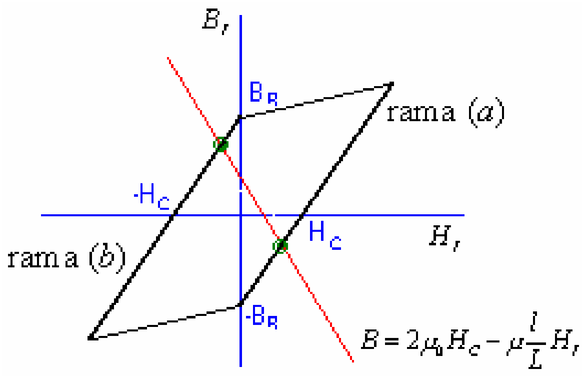
$$B = \frac{\mu}{L}\left(NI - H_I l\right)$$

Utilizando la relación $\mu NI = 2\mu_0 H_C L$ dada por la letra, la última ecuación queda:

$$B = 2\mu_0 H_C - \mu \frac{l}{L} H_I$$

Esta es la relación entre H_I y B_I determinada por el circuito magnético. Por otro lado, la curva de histéresis del IP nos da otra relación que se debe satisfacer entre ambos:

$$B_I = \begin{cases} \dfrac{B_R}{H_C}\left(H_I - H_C\right) & \text{en la rama } (a) \\ \dfrac{B_R}{H_C}\left(H_I + H_C\right) & \text{en la rama } (b) \end{cases}$$



(las otras ramas no son accesibles en esta situación). Del enunciado se obtiene que: $B_R/H_C = 3\mu_0$.

B_I debe satisfacer ambas relaciones, con lo cual su valor queda fijado para cada rama:

rama (a)

$$B = 2\mu_0 H_C - \mu \frac{l}{L} H_I = 3\mu_0\left(H_I - H_C\right)$$

despejando…

$$\boxed{H_I = \frac{5\mu_0}{3\mu_0 + l/L\,\mu} H_C} \qquad \boxed{B = 3\mu_0 H_C \left(\frac{2\mu_0 - l/L\,\mu}{3\mu_0 + l/L\,\mu}\right)}$$

rama (b)

$$B = 2\mu_0 H_C - \mu \frac{l}{L} H_I = 3\mu_0\left(H_I + H_C\right)$$

despejando…

$$\boxed{H_I = -\frac{\mu_0}{3\mu_0 + l/L\,\mu} H_C} \qquad \boxed{B = 3\mu_0 H_C \left(\frac{2\mu_0 + l/L\,\mu}{3\mu_0 + l/L\,\mu}\right)}$$

En cuanto a H_N, este es (como ya se vió) simplemente B/μ para ambos casos. Cada solución corresponde a una orientación del IP diferente.

b) Observamos que B sólo puede anularse en la rama (a), y para ello se debe cumplir:

$$2\mu_0 - l/L\,\mu = 0$$

es decir,

$$\boxed{\frac{l}{L} = 2\frac{\mu_0}{\mu}}$$