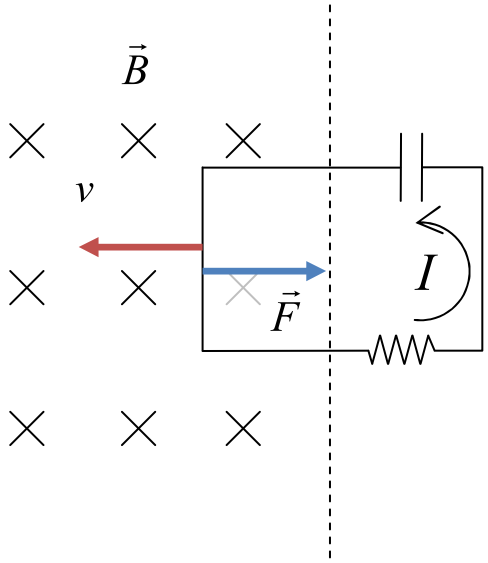
Examen de electromagnetismo, 16 de Diciembre 2008
Solución

Problema 1

a) De la ecuación de Newton y la fuerza magnética sobre la espira:



$$m\frac{dv}{dt} = -IlB$$

$$v(t) - v_0 = -\frac{lB}{m}\int_0^t Idt = -\frac{lB}{m}\left(q(t) - q(0)\right)$$

$$q(t) = m\frac{v_0 - v}{lB}$$

$$v = v_0 - \frac{lB}{m}q$$

b) De la ecuación de malla:

$$Blv = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

Sustituyendo:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{R}\left(\frac{B^2l^2}{m} + \frac{1}{C}\right)v + \frac{v_0}{RC}$$

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{mv_0}{\left(B^2l^2C + m\right)}\right)e^{-\left(\frac{B^2l^2}{Rm} + \frac{1}{RC}\right)t} + \frac{mv_0}{\left(B^2l^2C + m\right)}$$

c) la carga final se deduce del valor estacionario de $v(t = \infty)$

$$q(t = \infty) = \frac{mBlCv_0}{\left(B^2l^2C + m\right)}$$

d) La energía disipada corresponde a la variación de la energía cinética y a la energía que almacena el condensador,

$$E = -\frac{1}{2}m\left(v^2 - v_0^2\right) - \frac{q^2}{2C}$$
$$= \frac{1}{2}mv_0^2\frac{CB^2l^2}{B^2l^2C + m}$$

usando los valores para $t = \infty$ de las partes anteriores.

Solución Problema 2.

a) Las ecuaciones de Maxwell cuando $\vec{J} = 0$ y $\rho = 0$ son

$$(1)\quad \nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad (2)\quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$(3)\quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (4)\quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

que para la onda plana monocromática de vector de propagación $\vec{k}$ y frecuencia ω conducen a

$$(\mathrm{i})\quad i\vec{k} \cdot \vec{D}_0 = 0, \quad (\mathrm{ii})\quad i\vec{k} \times \vec{E}_0 = i\omega \vec{B}_0$$
$$(\mathrm{iii})\quad i\vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0, \quad (\mathrm{iv})\quad i\vec{k} \times \vec{H}_0 = -i\omega \vec{D}_0$$

luego de cancelar el factor $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$.

b) De la ecuación (i) se desprende que $\vec{D}_0$ y $\vec{k}$ son perpendiculares, porque su producto escalar es nulo. De la ecuación (ii), se deduce que $\vec{E}_0$ y $\vec{B}_0$ son perpendiculares por las propiedades del producto vectorial. De (iii) y (iv) se deduce, análogamente, que son perpendiculares entre sí los vectores $\vec{B}_0$ y $\vec{k}$, y $\vec{H}_0$ y $\vec{D}_0$. Gracias a estas propiedades de ortogonalidad, los módulos pueden relacionarse fácilmente a partir de (ii) y (iv),

$$D_0 = \frac{k}{\omega} H_0, \quad E_0 = \frac{\omega}{k} B_0$$

Por la relación constitutiva $\vec{B} = \mu \vec{H}$, encontramos

$$\boxed{H_0 = \frac{B_0}{\mu}, \quad D_0 = \frac{k}{\omega}\frac{B_0}{\mu}}$$

También por la relación constitutiva, sabemos que $\vec{B}$ y $\vec{H}$ son paralelos y tienen el mismo sentido, de manera que podemos poner $\vec{H}_0 = H_0 \hat{x}$. Sabiendo que $\vec{k} = k\hat{z}$ y que $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$, lo anterior y la ecuación (iv) indican que $\vec{D}_0 = -D_0 \hat{y}$.

c) Usamos el valor hallado en la parte anterior $\vec{D}_0 = -D_0 \hat{y}$, o sea $D_{0x} = D_{0z} = 0$ y $D_{0y} = -D_0$. Con la relación constitutiva $\vec{E} = \eta \vec{D}$ calculamos en componentes

$$E_x = D_x/\varepsilon = 0,$$
$$E_y = (D_y + D_z)/\varepsilon = D_y/\varepsilon,$$
$$E_z = (D_y + D_z)/\varepsilon = D_y/\varepsilon,$$

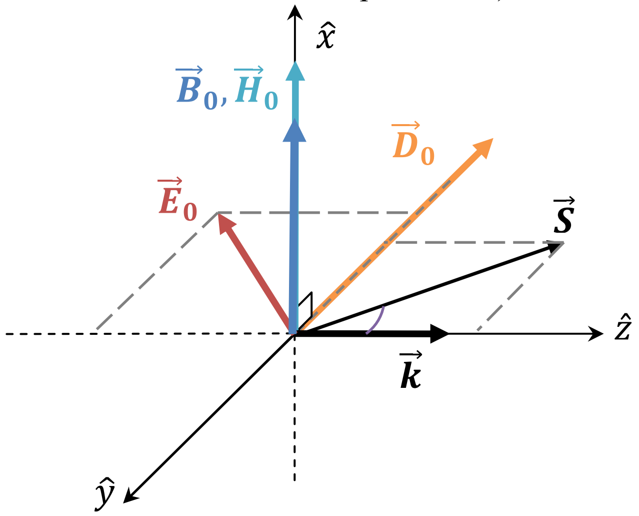
o, en forma más compacta (cancelando $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$) ,

$$\vec{E}_0 = -\frac{D_0}{\varepsilon}(\hat{y} + \hat{z}) = -\frac{k}{\omega}\frac{B_0}{\varepsilon\mu}(\hat{y} + \hat{z})$$

Observación: en vista de que sabemos que $E_0 = \omega B_0/k$, la última relación es posible sólo si se cumple

$$\frac{k}{\omega}\frac{B_0}{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{k} B_0 \Leftrightarrow \frac{\omega}{k} \equiv v_f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad \text{(relación de dispersión)}$$

d) Los vectores pueden representarse como se muestra en el diagrama (recordar que las escalas de los vectores son totalmente independientes).



e) La densidad de energía (instantánea) es

$$u(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\big[\vec{E}(\vec{r},t)\big]\cdot\mathrm{Re}\big[\vec{D}(\vec{r},t)\big] + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\big[\vec{B}(\vec{r},t)\big]\cdot\mathrm{Re}\big[\vec{H}(\vec{r},t)\big]$$

Usando la sugerencia, la densidad de energía media es (al ser $\vec{B}_0$ real, $\vec{D}_0$, $\vec{E}_0$ y $\vec{H}_0$ también lo son):

$$\begin{aligned}\bar{u}(\vec{r}) &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\big[\vec{E}_0\cdot\vec{D}_0^*\big] + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\big[\vec{B}_0\cdot\vec{H}_0^*\big]\\ &= \frac{D_0^2}{2\varepsilon} + \frac{B_0^2}{2\mu} = \frac{B_0^2}{2\mu}\left[\left(\frac{k}{\omega}\right)^2\frac{1}{\mu\varepsilon} + 1\right]\\ &= \frac{B_0^2}{\mu}\ \text{(gracias a la relación de dispersión)}\end{aligned}$$

f) El vector de Poynting es

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}[\vec{E}(\vec{r},t)]\times\mathrm{Re}[\vec{H}(\vec{r},t)]$$

La sugerencia de la parte (e) también se aplica al valor medio de $\vec{S}$, con lo que se llega a

$$\begin{aligned}\bar{S} &= \mathrm{Re}\big[\vec{E}_0\times\vec{H}_0^*\big]\\ &= \frac{\omega}{k}\frac{B_0^2}{\mu}(-\hat{y}+\hat{z})\\ &= v_f\bar{u}(-\hat{y}+\hat{z})\ \text{(gracias a la relación de dispersión)}\end{aligned}$$

usando $-\hat{z}\times\hat{x} = -\hat{y}$, $-\hat{y}\times\hat{x} = \hat{z}$.

g) El vector de Poynting señala el flujo de energía por unidad de área y por unidad de tiempo, y por lo tanto da la dirección de propagación de la energía. Forma $\pi/4$.con la dirección de propagación del frente de onda, la dirección de $\vec{k}$.

Solución Problema 3.

a) Por la simetría del problema, ignorando efectos de borde, los campos tienen solo componente según el eje *x* de la figura. En el estado estacionario, deben cumplir

$$\sigma_l = D_2 - D_1 = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1,$$

donde σ_l es la densidad de carga libre, y

$$J_1 = J_2$$

porque en el estado estacionario el flujo hacia la superficie es el mismo que desde ella.

b) Usando la relación para un material óhmico, la última ecuación dice que $g_1 E_1 = g_2 E_2$. La diferencia de potencial entre las placas es V; para los campos implica:

$$V(x = l_1 + l_2) - V(x = 0) = -V = -\int_{x=0}^{x=l_1+l_2} \vec{E} d\vec{l} = -(E_1 l_1 + E_2 l_2),$$

o sea $V = E_1 l_1 + E_2 l_2$. Se puede resolver el sistema con las tres ecuaciones para el campo eléctrico, obteniendo

$$\begin{cases} \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \sigma_l \\ l_2 E_2 + l_1 E_1 = V \\ g_1 E_1 = g_2 E_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \dfrac{g_2 V}{g_1 l_2 + g_2 l_1} \\ E_2 = \dfrac{g_1 V}{g_1 l_2 + g_2 l_1} \\ \sigma = \dfrac{\varepsilon_2 g_1 - \varepsilon_1 g_2}{g_1 l_2 + g_2 l_1} V \end{cases}.$$

c) La resistencia *R* estará dada por $R = V / I$. Aquí *I* es la corriente total, igual al flujo de la densidad de corriente J,

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = JA = \frac{g_1 g_2 A}{g_2 l_1 + g_1 l_2} V, \text{ de donde } R = \frac{g_2 l_1 + g_1 l_2}{g_1 g_2 A} = \frac{l_1}{g_1 A} + \frac{l_2}{g_2 A}$$

(la última relación se obtendría al sumar en serie la resistencia de cada parte).

d). Expresamos la conservación de la carga en la forma

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

donde *S* es una superficie cerrada y *Q* es la carga en el interior de *S*. Aplicando esta identidad a una cilindro con las tapas de área *A* a ambos lados de la superficie. La carga encerrada es $Q = \sigma A$, y la integral es $J_2 A - J_1 A$. La relación entonces es

$$J_1 - J_2 = \frac{d\sigma}{dt}.$$

b) Disponemos de las ecuaciones:

$$\begin{cases} J_1 - J_2 = g_1 E_1 - g_2 E_2 = d\sigma / dt \\ D_2 - D_1 = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \sigma \\ l_1 E_1 + l_2 E_2 = V \end{cases}$$

Despejamos primero E_2 como $E_2 = \frac{V - l_1 E_1}{l_2}$. Obtenemos luego $E_1 = \frac{V - l_2 \sigma}{\varepsilon_1 l_2 + \varepsilon_2 l_1}$.

Sustituyendo, llegamos a la ecuación

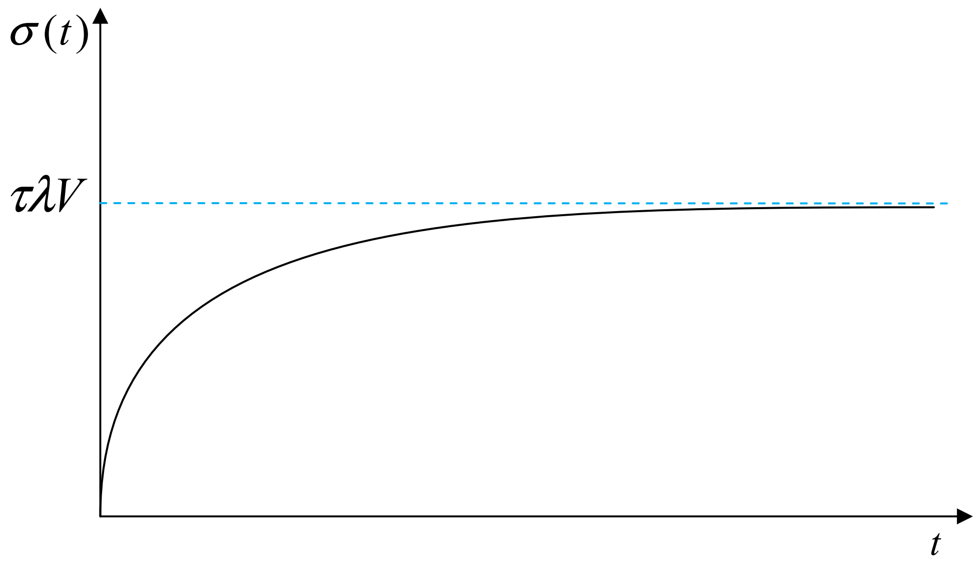
$$\lambda V - \frac{\sigma}{\tau} = \frac{d\sigma}{dt}$$

con $\lambda = \frac{\varepsilon_2}{l_2}\left(\frac{l_2 g_1 + l_1 g_2}{l_2 \varepsilon_1 + l_1 \varepsilon_2}\right) - \frac{g_2}{l_2}$ y $\tau = \frac{l_1 \varepsilon_2 + l_2 \varepsilon_1}{l_1 g_2 + l_2 g_1}$.

f) Imponiendo como condición inicial $\sigma(t = 0) = 0$, la solución para la densidad de carga es:

$$\sigma(t) = \tau\lambda V\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

Un bosquejo da:



Observar que cuando $t/\tau \to \infty$, la densidad de carga tiende a $\sigma(t) \to \lambda\tau V$, que es el valor estacionario hallado en (a).