

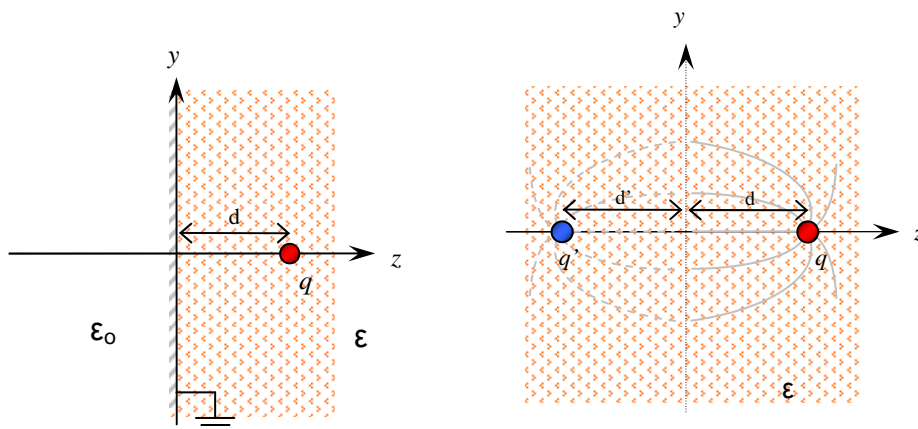
# Electromagnetismo

## Curso 2007

### Solución examen diciembre

#### Problema 1

a) La solución para el potencial se puede obtener mediante el método de imágenes, para la región  $z > 0$ , considerando el problema electrostático de dos cargas puntuales:



Carga:  $q \rightarrow (0, 0, d) \equiv \vec{r}_o$

Imagen:  $q' \rightarrow (0, 0, -d') \equiv \vec{r}_o'$

de modo que el potencial es

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d')^2}} \text{ para } z > 0.$$

La condición del plano conductor a potencial cero permite determinar la carga  $q'$ :

$$\varphi(x, y, z=0) = 0 \Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}} + \frac{q'}{4\pi\epsilon\sqrt{x^2 + y^2 + d'^2}} = 0$$

La igualdad debe cumplirse para todo  $x$  e  $y$ . La única solución es  $d' = d$  y  $q' = -q$ .

Con estos valores, el potencial  $\varphi$  cumple la ecuación Laplace y las mismas condiciones de borde en la región  $z > 0$  que el problema original. Por *unicidad de la solución*, el potencial  $\varphi$  es el buscado.

Para  $z < 0$  el campo eléctrico es nulo ya que en esa región no hay cargas y el conductor establece que el potencial es cero en el plano  $z = 0$ . Por lo tanto  $\varphi = 0$  para  $z < 0$ .

Campo eléctrico:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + (z-d)\hat{k}}{(x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{3/2}} - \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + (z+d)\hat{k}}{(x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \right], \text{ para } z > 0$$

Se puede escribir de manera más formal como  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{\vec{r} - \vec{r}_o}{|\vec{r} - \vec{r}_o|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}_o'}{|\vec{r} - \vec{r}_o'|^3} \right]$ .

b) La densidad de carga superficial (libre) puede encontrarse de

$$\sigma = \vec{D}_2 \cdot \hat{n} |_{z=0} = \epsilon \vec{E}_2 \cdot \hat{n} |_{z=0}$$

donde  $\vec{D}_2, \vec{E}_2$  son los campos en la región con la esfera (son nulos en la otra región) y  $\hat{n} = \hat{k}$  es la normal al plano. Utilizando el resultado de la parte anterior, se encuentra

$$\sigma(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2qd}{(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}$$

c) Al ser un medio conductor (óhmico) se cumple  $\vec{J} = g\vec{E}$ . Tomando una superficie cerrada que encierre a la esfera, la corriente que llega al plano puede expresarse en términos del flujo de  $\vec{J}$ :

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = g \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{g}{\epsilon} q$$

donde se utilizó la ley de Gauss en la última igualdad<sup>1</sup>. Esta es la corriente que sale de la esfera:

$$I = -\frac{dq}{dt}$$

Igualando los resultados tenemos  $-\frac{dq}{dt} = \frac{g}{\epsilon} q$ . Resolviendo entre  $t_0$  y  $t$  se encuentra  $q(t) = q_0 e^{-\frac{g}{\epsilon}(t-t_0)}$ , y a partir de esto, finalmente, la corriente:

$$I(t) = \frac{q_0 g}{\epsilon} e^{-\frac{g}{\epsilon}(t-t_0)}$$

d) Planteando la relación de que en el tiempo  $t_{\frac{1}{2}}$  se cumple  $I(t_{\frac{1}{2}}) = \frac{I(t_0)}{2}$ , se utiliza el resultado anterior para igualar

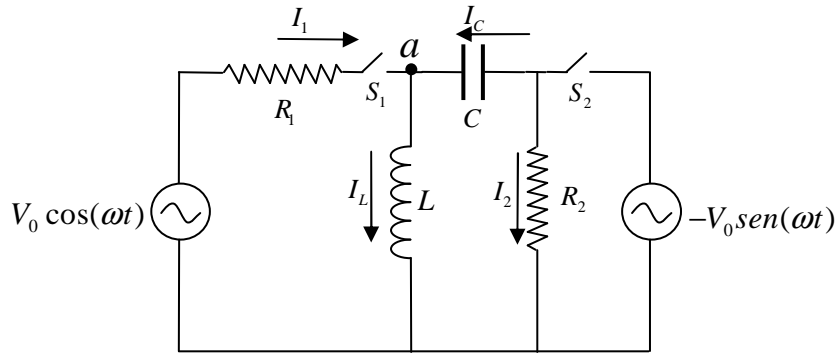
$$I_0 e^{-\frac{g}{\epsilon}(t_{1/2}-t_0)} = \frac{I_0}{2}, \quad \text{con } I_0 = I(t_0) = q_0 \frac{g}{\epsilon}$$

De lo que se desprende

$$t_{\frac{1}{2}} = t_0 + \frac{\epsilon}{g} \ln(2)$$

<sup>1</sup>Alternativamente se puede hallar la carga total en el plano mediante la integración de la densidad superficial de la parte anterior, pero con los signos en concordancia. Esto equivale a elegir el propio plano como superficie en la integral de la corriente.

**Problema 2**



a) Los voltajes en las fuentes son de la forma:

$$v_1(t) = V_0 \cos(\omega t) = \text{Re}(V_0 e^{j\omega t})$$

$$v_2(t) = -V_0 \text{sen}(\omega t) = V_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \text{Re}(V_0 e^{j\frac{\pi}{2}}) = \text{Re}(jV_0 e^{j\omega t})$$

Por lo que, por definición los voltajes complejos

$$V_1 = V_0 e^{j\omega t}$$

$$V_2 = jV_0 e^{j\omega t}$$

b) Planteando mallas por la bobina y el nudo en a:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_0 = R_1 I_1 + j\omega L I_L \\ jV_0 = \frac{I_C}{j\omega C} + j\omega L I_L \\ I_1 + I_C = I_L \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Luego, buscamos que no haya caída de tensión en la bobina, para ello} \\ \text{necesariamente la corriente por ésta debe ser también nula.} \\ \text{Imponiendo dicho} \end{array} \left. \begin{array}{l} I_1 = \frac{V_0}{R_1} \\ I_C = -\omega_0 C V_0 \\ I_1 + I_C = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 1/R_1 C} \quad \text{resultado:}$$

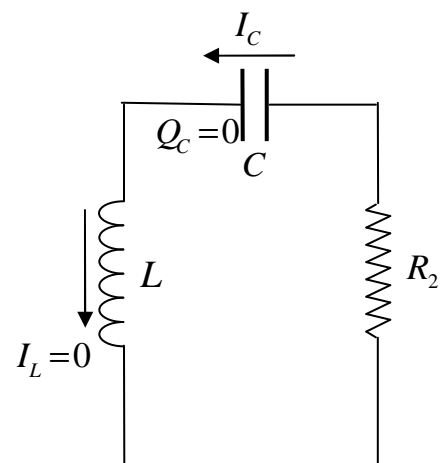
c) Trabajando a la frecuencia de la parte anterior, teníamos:

$$I_C = -\omega_0 C V_0 \Rightarrow I_C(t) = -\omega_0 C V_0 e^{j\omega_0 t}$$

$$i_c(t) = \text{Re}(-\omega_0 C V_0 e^{j\omega_0 t}) \Rightarrow \boxed{i_c(t) = -\omega_0 C V_0 \cos(\omega_0 t)} = \omega_0 C V_0 \cos(\omega_0 t + \pi)$$

$$i_c(t) = \frac{dQ_C}{dt} \Rightarrow \boxed{Q_C(t) = -C V_0 \text{sen}(\omega_0 t)} = C V_0 \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$$

d) Una vez que se levantan las llaves se obtiene un circuito L, R, C. El capacitor y el inductor son las componentes encargadas de suministrar su energía almacenada al nuevo circuito con las llaves abiertas. Sin embargo, de las condiciones iniciales para estos tenemos que tanto la corriente por el inductor, como la carga en el capacitor son cero. Por lo tanto la corriente por la malla va a ser nula para todo  $t > 0$ .



**Problema 3**

a) Ecs. de Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \wedge \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 & (\text{tanto dentro como fuera de la esfera } \vec{J} \text{ y } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ son nulos}) \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

Dentro de la esfera (medio 1) como  $\nabla \wedge \vec{H}_1 = 0$  existe una función potencial escalar magnético  $\varphi_1^*$  tal que  $\vec{H}_1 = -\nabla \varphi_1^*$ . Además como el medio es lineal  $\vec{H}_1 = \vec{B}_1 / \mu$  y a partir de la otra ecuación de Maxwell vemos que  $\varphi_1^*$  verifica la ecuación de Laplace  $\nabla^2 \varphi_1^{*2} = 0$ . Análogamente se demuestra que  $\vec{H}_2 = -\nabla \varphi_2^*$ , con  $\vec{H}_2 = \vec{B}_2 / \mu_0$  y  $\nabla^2 \varphi_2^{*2} = 0$ . De este modo, por la simetría del problema, los potenciales  $\varphi_1^*$  y  $\varphi_2^*$  buscados son solución a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas en cada uno de los medios respectivos.

b) Por lo expresado anteriormente y por tener el problema simetría azimutal, es posible escribir  $\varphi_1^*$  y  $\varphi_2^*$  como:

$$\varphi_1^* = \sum_{n=0}^{+\infty} (A_n r^n + \frac{C_n}{r^{n+1}}) P_n(\cos \theta) \quad \text{y} \quad \varphi_2^* = \sum_{n=0}^{+\infty} (A'_n r^n + \frac{C'_n}{r^{n+1}}) P_n(\cos \theta)$$

dónde  $P_n(\cos \theta)$  es el polinomio de Legendre de orden n, por ejemplo:  $P_0(\cos \theta) = 1$ ,  $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ . <sup>(i)</sup>

Condiciones en la zona interfacial ( $r = a$ ):

$$\begin{cases} H_{1\theta} = H_{2\theta} \Rightarrow -\nabla \varphi_1^* \cdot \hat{e}_\theta \Big|_{r=a} = -\nabla \varphi_2^* \cdot \hat{e}_\theta \Big|_{r=a} \Rightarrow \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial \theta} \Big|_{r=a} \Rightarrow \boxed{\varphi_1^* \Big|_{r=a} = \varphi_2^* \Big|_{r=a} + cte} \quad (I) \\ B_{1r} = B_{2r} \Rightarrow -\mu \nabla \varphi_1^* \cdot \hat{e}_r \Big|_{r=a} = -\mu_0 \nabla \varphi_2^* \cdot \hat{e}_r \Big|_{r=a} \Rightarrow \boxed{-\mu \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial r} \Big|_{r=a}} \quad (II) \end{cases}$$

c) Condiciones para “ $r \approx \infty$ ” y “ $r \approx 0$ ”

• **Caso  $r \gg a$**  (medio 2)

$$\vec{B} \approx B_0 \hat{e}_z \Rightarrow \varphi_2^* \rightarrow -\frac{B_0}{\mu_0} (r \cos \theta) + A_0'$$

Por otra parte  $\varphi_2^*(r \rightarrow \infty, \theta) \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (A'_n r^n) P_n(\cos \theta)$

Usando que los  $P_n(\cos \theta)$  son linealmente independientes para los distintos n e identificando término a término:

$$\begin{cases} \boxed{-\frac{B_0}{\mu_0} = A_1'} \\ A_0' \text{ (sin determinar)} \\ \boxed{A_n' = 0} \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

No obtenemos de aquí información sobre los coeficientes  $C_n'$

Por ahora sabemos que

$$\varphi_2^*(r, \theta) = A_0' + \frac{C_0'}{r} + \left(-\frac{B_0}{\mu_0} r + \frac{C_1'}{r^2}\right) \cos \theta + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{C_n'}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos \theta)$$

• **Caso**  $r \ll a$  (medio 1)

$$\varphi_1^* < \infty \text{ (acotado)}$$

Esto implica que los  $C_n=0 \forall n$ . No obtenemos de aquí información sobre los coeficientes  $A_n$ .

$$\varphi_1^*(r, \theta) = A_0 + A_1 r \cos \theta + \sum_{n=2}^{+\infty} (A_n r^n) P_n(\cos \theta)$$

La información faltante proviene de las ecuaciones (I) y (II) que se hallaron en la parte b).

De (I):

$$A_0 + A_1 a \cos \theta + \sum_{n=2}^{+\infty} (A_n a^n) P_n(\cos \theta) = A_0' + \frac{C_0'}{a} + \left(-\frac{B_0}{\mu_0} a + \frac{C_1'}{a^2}\right) \cos \theta + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{C_n'}{a^{n+1}}\right) P_n(\cos \theta)$$

Identificando término a término:

$$\begin{cases} A_0 = A_0' + \frac{C_0'}{a} & (i) \\ A_1 a = -\frac{B_0}{\mu_0} a + \frac{C_1'}{a^2} & (ii) \\ A_n a^n = \frac{C_n'}{a^{n+1}}, \quad n \geq 2 & (iii) \end{cases}$$

De (II):

$$-\mu \left\{ A_1 \cos \theta + \sum_{n=2}^{+\infty} (n A_n a^{n-1}) P_n(\cos \theta) \right\} = \mu_0 \left\{ \frac{C_0'}{a^2} + \left(2 \frac{C_1'}{a^3} + \frac{B_0}{\mu_0}\right) \cos \theta + \sum_{n=2}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{C_n'}{a^{n+2}}\right) P_n(\cos \theta) \right\}$$

Identificando término a término:

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{C_0'}{a^2} = 0 & (i') \\ \mu_0 2 \frac{C_1'}{a^3} + B_0 = -\mu A_1 & (ii') \\ \mu_0 (n+1) \frac{C_n'}{a^{n+2}} = -n \mu A_n a^{n-1}, \quad n \geq 2 & (iii') \end{cases}$$

De (i) y (i') se obtiene  $C_0' = 0 \Rightarrow A_0' = A_0$  (los elijo cero)

De (ii) y (ii') se obtiene  $A_1 = -\frac{3B_0}{2\mu_0 + \mu}$  y  $C_1' = \frac{(\mu/\mu_0 - 1)a^3 B_0}{2\mu_0 + \mu}$

De (iii) y (iii') se obtiene  $A_n = 0, \quad n \geq 2$  y  $C_n' = 0, \quad n \geq 2$

Se tiene entonces que

$$\begin{cases} \varphi_1^*(r, \theta) = -\frac{3B_0}{2\mu_0 + \mu} r \cos \theta, & r < a \\ \varphi_2^*(r, \theta) = -\frac{B_0}{\mu_0} r \cos \theta + \frac{(\frac{\mu}{\mu_0} - 1)a^3 B_0 \cos \theta}{2\mu_0 + \mu r^2}, & r > a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 = \mu \vec{H}_1 = -\mu \nabla \varphi_1^*$$

$$\vec{B}_1 = \frac{3B_0}{1 + 2(\frac{\mu_0}{\mu})} \hat{e}_k, \quad (\hat{e}_k = \cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta)$$

$$\Rightarrow \vec{B}_2 = \mu_0 \vec{H}_2 = -\mu_0 \nabla \varphi_2^*$$

$$\vec{B}_2 = B_0 \hat{e}_k + \left( \frac{\frac{\mu}{\mu_0} - 1}{\frac{\mu}{\mu_0} + 2} \right) \left( \frac{a}{r} \right)^3 B_0 (2 \cos \theta \hat{e}_r + \sin \theta \hat{e}_\theta)$$

d) Una vez conocida la magnetización de la esfera es sencillo hallar  $\sigma_M$  y  $\rho_M$ .

$$\vec{H}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{y} \quad \vec{H}_1 = \frac{\vec{B}_1}{\mu}$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) B_1 \hat{e}_k = \frac{3B_0}{\mu_0} \left( \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \right) (\cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta)$$

$$\sigma_M(r = a, \theta) = \vec{M} \cdot \hat{e}_r \Rightarrow \sigma_M(\theta) = \frac{3B_0}{\mu_0} \left( \frac{\frac{\mu_0}{\mu} - 1}{1 + 2\frac{\mu_0}{\mu}} \right) \cos \theta$$

$$\rho_M(r, \theta) = -\nabla \cdot \vec{M} = -\left( \frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) \nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \Rightarrow \rho_M(r, \theta) = 0$$

<sup>i</sup> Puede realizarse una resolución menos formal basada en la intuición, usando sólo los términos correspondientes a los dos primeros polinomios de Legendre  $P_0(\cos \theta) = 1$  y  $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ , basta que los potenciales así propuestos, cumplan Laplace y las condiciones de borde.