Examen de electromagnetismo – 20/12/2006

- Solución -

Problema 1

a) $\nabla\wedge\vec{H}=\vec{J}=\vec{0}$ para $r<a$ y $r>a$.

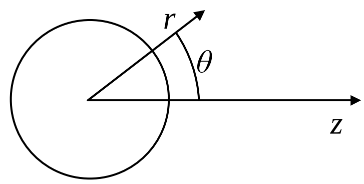
$$\nabla.\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\nabla.\vec{B}-\nabla.\vec{M}=-\nabla.\vec{M}\qquad \begin{cases} r<a:\ \vec{M}=M\hat{k}\ \text{(cte.)}\ \Rightarrow\ \nabla.\vec{H}=-M\nabla.\hat{k}=0\\ r>a:\ \vec{M}=\vec{0}\ \ \Rightarrow\ \nabla.\vec{H}=-\nabla.\vec{0}=0\end{cases}$$

b) Sean: $\begin{cases}\vec{H}_1\ \text{para}\ r<a \qquad \nabla\wedge\vec{H}_1=\vec{0}\ \Rightarrow\ \vec{H}_1=-\nabla\Phi_1^*\\ \vec{H}_2\ \text{para}\ r>a \qquad \nabla\wedge\vec{H}_2=\vec{0}\ \Rightarrow\ \vec{H}_2=-\nabla\Phi_2^*\end{cases}$

$$\nabla.\vec{H}_1=\nabla.\vec{H}_2=0\ \Rightarrow\ \nabla^2\Phi_1^*=\nabla^2\Phi_2^*=0$$

El problema tiene simetría en torno al eje z, sean las soluciones:

$$\begin{cases}\Phi_1^*(r,\theta)=A_0+C_0r^{-1}+(A_1r\,+\,C_1r^{-2})\cos\theta \qquad \text{para}\ r<a\\ \Phi_2^*(r,\theta)=A_0'+C_0'r^{-1}+(A_1'r\,+\,C_1'r^{-2})\cos\theta \qquad \text{para}\ r>a\end{cases}$$



- Se puede elegir: $A_0=A_0'=0$.
- Es: $C_0=C_0'=0$ porque no hay carga magnética neta.

Condiciones de borde:

- $\Phi_1^*(r=0,\theta)<\infty\ \ \Rightarrow C_1=0$
- $\Phi_2^*(r=\infty,\theta)<\infty\ \ \Rightarrow\ A_1'=0$
- $\Phi_1(r=a,\theta)=\Phi_2(r=a,\theta)\ \ \Rightarrow\ \ A_1a\cos\theta=\dfrac{C_2'}{a^2}\cos\theta\quad\forall\theta\ \ \Rightarrow\ \ C_2'=A_1a^3$

Se tiene que: $\Phi_1^*(r,\theta)=A_1r\cos\theta$ y $\Phi_2^*(r,\theta)=A_1\dfrac{a^3}{r^2}\cos\theta$

- $B_{1r}\big|_a-B_{2r}\big|_a=0$

Es: $\begin{cases}\vec{H}_1=-\dfrac{\partial\Phi_1^*}{\partial r}\hat{e}_r-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi_1^*}{\partial\theta}\hat{e}_\theta=-A_1\cos\theta\hat{e}_r+A_1\text{sen}\theta\hat{e}_\theta=-A_1\hat{k}\\ \vec{H}_2=2A_1\dfrac{a^3}{r^3}\cos\theta\hat{e}_r+A_1\dfrac{a^3}{r^3}\text{sen}\theta\hat{e}_\theta\end{cases}$

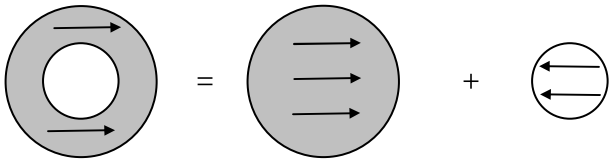
y: $\begin{cases}\vec{B}_1=\mu_0(\vec{H}_1+M\hat{k})=\mu_0(-A_1+M)\hat{k}\\ \vec{B}_2=\mu_0\vec{H}_2=2\mu_0A_1\dfrac{a^3}{r^3}\cos\theta\hat{e}_r+\mu_0A_1\dfrac{a^3}{r^3}\text{sen}\theta\hat{e}_\theta\end{cases}$

La condición de borde queda ($r=a$): $\mu_0(-A_1+M)\hat{k}.\hat{e}_r = 2\mu_0 A_1\cos\theta$

$\hat{k}.\hat{e}_r = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad A_1 = \dfrac{M}{3}$

Entonces: $$\begin{cases} \vec{H}_1 = -\dfrac{M}{3}\hat{k} & \vec{B}_1 = \dfrac{2}{3}\mu_0 M\hat{k} \\ \vec{H}_2 = \dfrac{1}{3}\dfrac{Ma^3}{r^3}(2\cos\theta\hat{e}_r + \operatorname{sen}\theta\hat{e}_\theta) & \vec{B}_2 = \mu_0\vec{H}_2 \end{cases}$$

c) La distribución puede ser vista como la superposición de la distribución de la parte a) con una esfera concéntrica de radio $a/2$ y magnetización $-M\hat{k}$:



Sean: $\bar{H}_z, \bar{B}_z$ los campos buscados; H_z, B_z los producidos por la esfera de radio a y H'_z, B'_z los campos producidos por la esfera de radio a/2.

Con $\theta = 0,\ r = z$:

$$\begin{cases} H_{1z} = -\dfrac{M}{3} & B_{1z} = \dfrac{2}{3}\mu_0 M & r < a \\ H_{2z} = \dfrac{2}{3}\dfrac{Ma^3}{z^3} & B_{2z} = \mu_0 H_{2z} & r > a \end{cases}$$

Cambiando a por a/2 y M por $-M$ se obtienen los campos producidos por la esfera de radio a/2:

$$\begin{cases} H'_{1z} = \dfrac{M}{3} & B'_{1z} = -\dfrac{2}{3}\mu_0 M & r < a/2 \\ H'_{2z} = \dfrac{2}{3}\dfrac{(-M)(a/2)^3}{z^3} = -\dfrac{1}{12}\dfrac{Ma^3}{z^3} & B'_{2z} = \mu_0 H_{2z} & r > a/2 \end{cases}$$

Sumando:

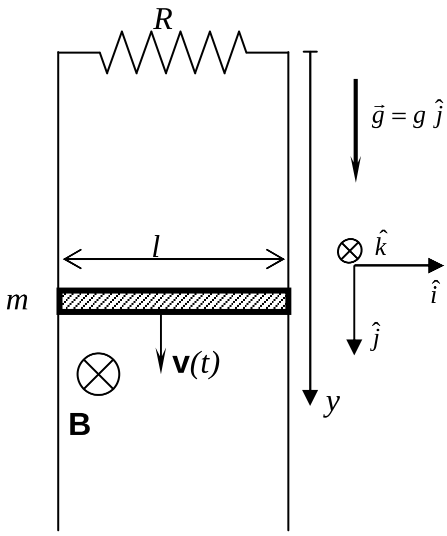
- $r < a/2$: $\quad \bar{H}_z = 0,\ \ \bar{B}_z = 0$
- $a/2 < r < a$:

$$\bar{H}_z = -\frac{M}{3} - \frac{1}{12}\frac{Ma^3}{z^3} = -\frac{M}{3}\left(1+\frac{a^3}{4z^3}\right), \qquad \bar{B}_z = \frac{2}{3}\mu_0 M - \mu_0\frac{1}{12}\frac{Ma^3}{z^3} = \frac{2}{3}\mu_0 M\left(1-\frac{a^3}{8z^3}\right)$$

- $a < r$:

$$\bar{H}_z = \frac{2}{3}\frac{Ma^3}{z^3} - \frac{1}{12}\frac{Ma^3}{z^3} = \frac{7}{12}\frac{Ma^3}{z^3}, \qquad \bar{B}_z = \mu_0\bar{H}_z$$

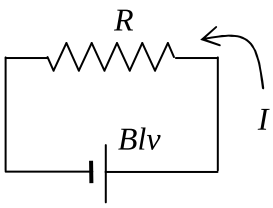
Problema 2



a) $E_{ind.} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$

$\Phi = Bly \quad \Rightarrow \quad E_{ind.} = -Blv$

Habiendo elegido el flujo entrante como positivo, el sentido *horario* de circulación en el circuito debe tomarse como positivo, de modo que la *fem* inducida es *antihoraria*:



$$Blv - RI = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{Bl}{R}v}$$

b) $\vec{F}_m = I(l\hat{i}) \wedge (B\hat{k}) = -(BlI)\,\hat{j} = -\dfrac{B^2l^2}{R}v\,\hat{j}$

c) Ec. de Newton: $m\dot{v} = -\dfrac{B^2l^2}{R}v + mg \quad \Rightarrow \quad v(t) = Ae^{-\frac{B^2l^2}{mR}t} + \dfrac{mRg}{B^2l^2}$

$$v(0) = A + \frac{mRg}{B^2l^2} = 0 \;\Rightarrow\; v(t) = \frac{mRg}{B^2l^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\right) = g\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

d) $v(t) = g\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \xrightarrow{t >> \tau} g\tau = v_{\lim}$

$$g\tau(1 - e^{-\frac{t_{1/2}}{\tau}}) = \frac{1}{2}g\tau \;\Rightarrow\; e^{-\frac{t_{1/2}}{\tau}} = \frac{1}{2} \;\therefore\; \boxed{t_{1/2} = \tau \mathrm{Ln}2}$$

e) En el sistema, cuando la altura de la barra varía en Δh, se cumple:

$$\Delta K_{barra} + \Delta U_{barra} + E_{disip.} = 0$$

$$t >> \tau \;\Rightarrow\; v = v_{\lim} \;\; \text{(cte.)} \quad \Rightarrow \; \Delta K_{barra} = 0$$

$$\therefore \; \boxed{E_{disip.} = -\Delta U_{barra} = -mg\Delta h}$$

Problema 3

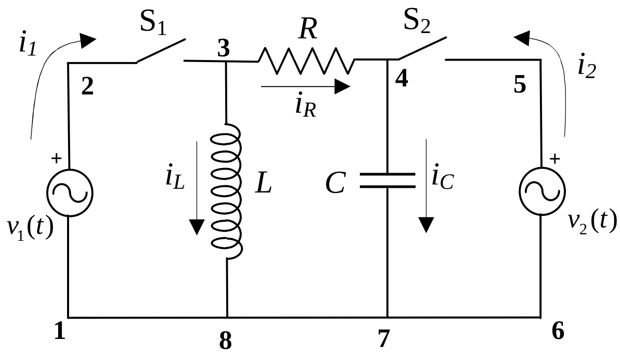
a)

$$v_1(t) = V_0\text{sen}(\omega t) = V_0\cos(\omega t - \pi/2) = \text{Re}[V_0 e^{j(\omega t-\pi/2)}]$$

$$e^{-j\pi/2} = -j \quad \Rightarrow \quad v_1(t) = \text{Re}[-jV_0 e^{j\omega t}] \quad \therefore \quad \boxed{V_1(t) = -jV_0 e^{j\omega t}}$$

$$v_2(t) = V_0\cos(\omega t) = \text{Re}[V_0 e^{j\omega t}] \quad \therefore \quad \boxed{V_2(t) = V_0 e^{j\omega t}}$$

b) Mallas:



1238: $-jV_0 - j\omega L I_L = 0 \qquad (1)$

1256: $-jV_0 - RI_R - V_0 = 0 \qquad (2)$

6547: $V_0 - \dfrac{I_C}{j\omega C} = 0 \qquad (3)$

Nodos: **3**: $I_1 = I_L + I_R$, **4**: $I_2 = I_C - I_R$

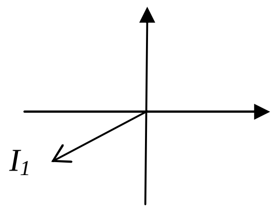
(1): $I_L = -\dfrac{V_0}{\omega L}$ (2): $I_R = -\dfrac{V_0}{R}(1+j)$ (3): $I_C = j\omega C V_0$

$$\begin{cases} I_1 = -\dfrac{V_0}{\omega L} - \dfrac{V_0}{R}(1+j) = -V_0\left[\left(\dfrac{1}{\omega L} + \dfrac{1}{R}\right) + \dfrac{1}{R}j\right] \\ I_2 = j\omega C V_0 + \dfrac{V_0}{R}(1+j) = V_0\left[\dfrac{1}{R} + \left(\dfrac{1}{R} + \omega C\right)j\right] \end{cases}$$

- $|I_1| = V_0\sqrt{\left(\dfrac{1}{\omega L} + \dfrac{1}{R}\right)^2 + \dfrac{1}{R^2}}$ $\qquad \tan(\phi_1) = \dfrac{1/R}{1/\omega L + 1/R} = \dfrac{1}{R/\omega L + 1}$

Como $\text{Re}[I_1], \text{Im}[I_1] < 0$ (*I_1* está en el tercer cuadrante):

$$\phi_1 = \text{Arctan}\left(\frac{1}{R/\omega L + 1}\right) + \pi$$



- $|I_2| = V_0\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \left(\dfrac{1}{R} + \omega C\right)^2}$ $\qquad \tan(\phi_2) = \dfrac{1/R + \omega C}{1/R} = 1 + \omega C R$

Con estos valores calculados: $i_1(t) = |I_1|\cos(\omega t + \phi_1)$; $i_2(t) = |I_2|\cos(\omega t + \phi_2)$.

c) La energía que se disipará en *R* es la energía que está almacenada en la bobina y en el capacitor en $t = 0$.

$$E_{dis.} = \frac{1}{2} L i_L^2 (t=0) + \frac{1}{2} C v_C^2 (t=0)$$

De la parte a): $i_L(t) = -\frac{V_0}{\omega L}\cos(\omega t)$

$$v_C(t) = v_2(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{dis.} = \frac{1}{2} L \left(\frac{V_0}{\omega L}\right)^2 + \frac{1}{2} C V_0^2}$$

d) Si los interruptores se abren en un instante cualquiera *t*:

$$E_{dis.} = \frac{1}{2} L \left(\frac{V_0}{\omega L}\right)^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} C V_0^2 \cos^2(\omega t) = \frac{V_0^2}{2}\left(\frac{1}{\omega^2 L} + C\right)\cos^2(\omega t)$$

La energía disipada será mínima ($E_{dis.} = 0$) cuando: $\cos(\omega t) = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{t = (2n+1)\frac{\pi}{2\omega},\ n \in N} \ .$$