Electromagnetismo
Curso 2008
Primer parcial

Problema 1 [20 Pts.] Considere una esfera maciza de radio *a* centrada en el origen de coordenadas. La esfera está compuesta por un material aislante que no tiene carga eléctrica neta y posee una polarización *uniforme* $\vec{P} = P_0\hat{k}$ donde $\hat{k}$ es el vector unitario en la dirección del eje *z*. El espacio exterior a la esfera está vacío y no se aplica ningún campo externo. Utilice para este problema coordenadas polares (r, θ, ϕ).

a) Escriba la relación entre los vectores $\vec{D}$, $\vec{E}$ (campo eléctrico) y $\vec{P}$ dentro y fuera de la esfera. [2 Pts.]
b) Halle las densidades de carga de polarización volumétrica ρ_P y superficial σ_P. [3 Pts.]
c) Sean $\varphi_1(\vec{r})$ y $\varphi_2(\vec{r})$ el potencial eléctrico dentro y fuera de la esfera respectivamente. ¿Qué condiciones deben cumplir estas funciones (o sus derivadas) en la superficie de la esfera (r = a)? [5 Pts.]
d) Halle el potencial eléctrico en todos los puntos (dentro y fuera de la esfera) admitiendo que el potencial se anula en el infinito. [6 Pts.]
e) Halle el campo eléctrico en el interior de la esfera. Exprese el resultado en la base cartesiana. [4 Pts.]

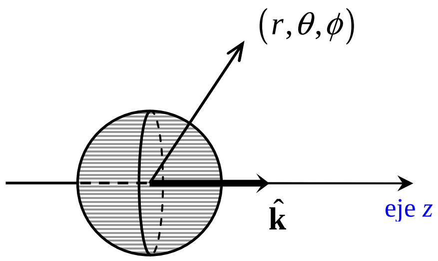

Figura 1

Problema 2 [20 Pts.] Se disponen los condensadores idénticos *A* y *B* de placas paralelas conectados ambos a una fuente de potencial *V* como se muestra en la figura. Las placas de los condensadores son cuadradas de lado l y están separadas por una distancia d. El condensador *B* puede desconectarse gracias a los interruptores.

Entre los condensadores se coloca un bloque dieléctrico de espesor d y masa m, llenando parte del espacio entre las placas (ver Figura 2): el condensador *A* queda **vacío** hasta una profundidad *x*, mientras que el *B* queda **lleno** hasta *x*. El dieléctrico es lineal con constante $\varepsilon = 1.2\varepsilon_0$. En este problema se desprecian efectos de borde.

Inicialmente los interruptores están cerrados.

a) Encuentre la capacidad de cada condensador y la capacidad equivalente del sistema. [2 Pts.]
b) Determine la energía almacenada en cada condensador y en el sistema total en función de la posición *x* del bloque dieléctrico. [3 Pts.]
c) Calcule las fuerzas sobre el bloque dieléctrico debidas a los condensadores *A* y *B* (indique claramente las direcciones). ¿Cuánto vale la fuerza neta? [3 Pts.]

En un cierto instante, cuando el dieléctrico se encuentra en la posición $x = x_0$ se abren los interruptores *simultáneamente*.

d) Calcule nuevamente las fuerzas sobre el bloque dieléctrico debidas a los condensadores *A* y *B*. [7 Pts.]

e) El bloque es situado por un agente externo en la posición $x = x_0 + \Delta x$. Encuentre la *fuerza total* y discuta su sentido según el signo de Δx (se supondrá que el bloque siempre tiene una parte en cada conductor, es decir, $0 < x < l$). Describa cualitativamente el movimiento subsiguiente del bloque. [5 Pts.]

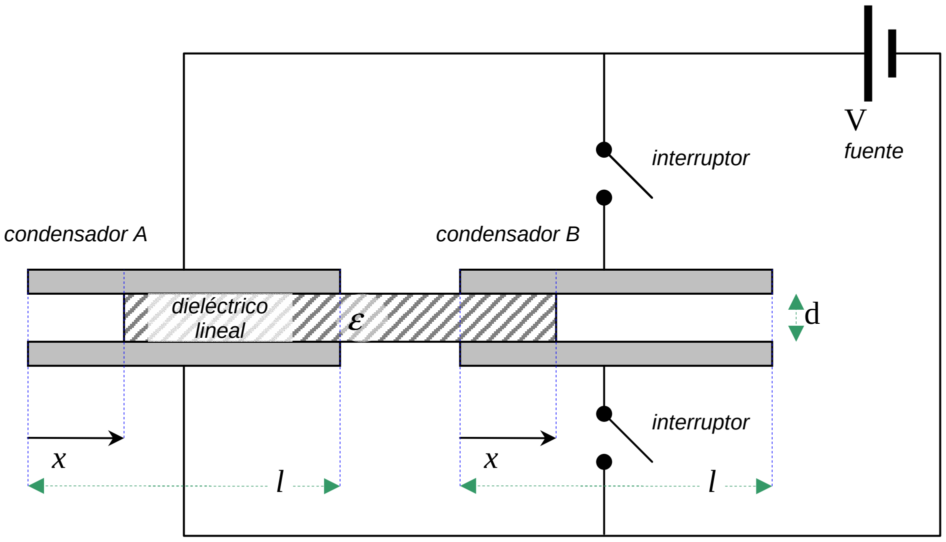

Figura 2

<u>Fórmulas de apoyo</u>.

Solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas polares para un sistema con simetría de revolución en torno al eje z:

$$\varphi(r,\theta) = A_0 + C_0 r^{-1} + \left(A_1 r + C_1 r^{-2}\right)\cos\theta + \left(A_2 r^2 + C_2 r^{-3}\right)\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(A_n r^n + C_n r^{-1-n}\right)P_n(\cos\theta) + \cdots$$

donde los A_n y C_n son constantes a determinar y $P_n(x)$ es el polinomio de Legendre de grado n.

Potencial producido por un dipolo $\vec{p}$ situado en el origen

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}.\vec{r}}{r^3}$$

Operadores Diferenciales

	Cartesianas	***Cilíndricas***	***Esféricas***
$grad\,\psi = \nabla\psi$	$\frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{k}$	$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{z}$	$\frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$
$div\,A = \nabla\cdot A$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial(sen\theta A_\theta)}{\partial\theta} +$ $+ \frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$
$rot\,A = \nabla\times A$	$\left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\hat{i} +$ $+\left[\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right]\hat{j} +$ $+\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]\hat{k}$	$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\hat{\rho} +$ $+\left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right]\hat{\varphi} +$ $+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right]\hat{k}$	$\frac{1}{r\,sen\theta}\left[\frac{\partial(sen\theta\,A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{r} +$ $+\left[\frac{1}{r\,sen\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\hat{\theta} +$ $+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\varphi}$
$Lapl\,\psi = \nabla^2\psi =$ $= div\,(grad\,\psi)$	$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right] + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2\,sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[sen\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right] +$ $+\frac{1}{r^2\,sen^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$